

# AMIII - Exercícios Resolvidos Sobre Formas Diferenciais e o Teorema de Stokes

11 de Janeiro de 2002

1. Seja  $S$  a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in E^3 : z = \cosh x, |x| < 1, y \in ]0, 1[ \}.$$

Calcule:

- (a) A área de  $S$ ;
- (b) O centróide de  $S$ ;
- (c) O momento de inércia de  $S$  em torno do eixo dos  $yy$  (assumindo uma densidade de massa por unidade de área constante igual a 1).

**Resolução:**

- (a) Uma parametrização desta superfície é por exemplo  $\mathbf{g} : ]-1, 1[ \times ]0, 1[ \rightarrow E^3$  dada por

$$\mathbf{g}(u, v) = (u, v, \cosh u).$$

O *pull-back* por esta parametrização de um elemento de volume compatível com a orientação por ela induzida é

$$\mathbf{g}^* dV_2 = \sqrt{\det G(u, v)} du \wedge dv,$$

onde  $G$  é a matriz  $2 \times 2$  dada por

$$G_{11} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} = (1, 0, \sinh u) \cdot (1, 0, \sinh u) = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u;$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} = (1, 0, \sinh u) \cdot (0, 1, 0) = 0;$$

$$G_{22} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} = (0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0) = 1.$$

Portanto

$$\det G(u, v) = \begin{vmatrix} \cosh^2 u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cosh^2 u$$

e a área da superfície é

$$\begin{aligned} V_2(S) &= \int_S dV_2 = \int_{]-1, 1[ \times ]0, 1[} \sqrt{\cosh^2 u} du \wedge dv = \int_{-1}^1 \int_0^1 \cosh u dv du \\ &= [\sinh u]_{-1}^1 = 2 \sinh 1 = e - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

(b) Por simetria  $x_C = 0$  e  $y_C = \frac{1}{2}$ . Como

$$\begin{aligned} \int_S z dV_2 &= \int_{]-1,1[ \times ]0,1[} \cosh u \cosh u \, du \wedge dv = \int_{-1}^1 \int_0^1 \cosh^2 u \, dv du \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)^2 du = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (e^{2u} + e^{-2u} + 2) du \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\cosh(2u) + 1) du = \frac{1}{4} [\sinh(2u)]_{-1}^1 + 1 = \frac{1}{2} \sinh 2 + 1 \end{aligned}$$

temos

$$z_C = \frac{1}{V_2(S)} \int_S z dV_2 = \frac{\frac{1}{2} \sinh 2 + 1}{2 \sinh 1}.$$

(c) Por definição,

$$\begin{aligned} I_y &= \int_S 1 (x^2 + z^2) dV_2 = \int_{]-1,1[ \times ]0,1[} (u^2 + \cosh^2 u) \cosh u \, du \wedge dv \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^1 (u^2 + \sinh^2 u + 1) \cosh u \, dv du \\ &= \int_{-1}^1 u^2 \cosh u \, du + \left[ \frac{\sinh^3 u}{3} \right]_{-1}^1 + 2 \\ &= 6 \sinh 1 - 4 \cosh 1 + \frac{2}{3} \sinh^3 1 + 2. \end{aligned}$$

2. Calcule

$$\oint_Q \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} + e^{x^2} \right) dx + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} + \sin y^2 \right) dy,$$

onde  $Q$  é o quadrado com vértices  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(0, -2)$  percorrido no sentido directo.

**Resolução:** Claramente a forma

$$\eta = e^{x^2} dx + \sin y^2 dy$$

é fechada, e portanto exacta (uma vez que está definida em  $E^2$ , que é em estrela). Portanto o seu integral ao longo de  $Q$  será nulo. É fácil ver que a forma

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

é também fechada:

$$d\omega = -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy = 0.$$

No entanto, uma vez que o domínio de  $\omega$  ( $E^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ) não é em estrela, não podemos concluir que é exacta. De facto, não é exacta: se  $C$  representa a circunferência de raio 1 em torno da origem percorrida no sentido directo, parametrizada por exemplo por  $\mathbf{g}: ]0, 2\pi[ \rightarrow E^2$  dada por

$$\mathbf{g}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta),$$

tem-se

$$\begin{aligned}\oint_C \omega &= \int_{]0,2\pi[} \mathbf{g}^* \omega = \int_{]0,2\pi[} -\frac{\sin \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d(\cos \theta) + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d(\sin \theta) \\ &= \int_{]0,2\pi[} \sin^2 \theta d\theta + \cos^2 \theta d\theta = \int_{]0,2\pi[} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0.\end{aligned}$$

Se  $A$  é a região do plano compreendida entre  $C$  e  $Q$ , tem-se  $\partial A = C \cup Q$ . A orientação usual de  $A$  (dada pelo elemento de volume  $dV_2 = dx \wedge dy$ ) induz em  $Q$  a orientação que corresponde a percorrer  $Q$  no sentido directo e  $C$  no sentido inverso; portanto pelo Teorema de Stokes

$$\oint_Q \omega = \int_A d\omega + \oint_C \omega = \int_A 0 + 2\pi = 2\pi$$

e o integral pedido é

$$\oint_Q \omega + \oint_Q \eta = 2\pi + 0 = 2\pi.$$

3. Calcule o fluxo do campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, yz, -z^2)$  para fora da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in E^3 : z^2 = 1 + x^2 + y^2, 2 \leq z \leq 3\}$$

(i.e., no sentido em que a distância ao eixo dos  $zz$  aumenta)

- Pela definição.
- Usando o Teorema da Divergência.
- Usando o Teorema de Stokes para campos vectoriais.

**Resolução:**

- (a) Uma parametrização de  $S$  é por exemplo  $\mathbf{g} : ]0, 2\pi[ \times ]2, 3[ \rightarrow E^3$  dada por

$$\mathbf{g}(\theta, z) = \left( \sqrt{z^2 - 1} \cos \theta, \sqrt{z^2 - 1} \sin \theta, z \right),$$

uma vez que em coordenadas cilíndricas a equação que define  $S$  se escreve  $z^2 = 1 + r^2$ . Como

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\sqrt{z^2 - 1} \sin \theta & \sqrt{z^2 - 1} \cos \theta & 0 \\ z(z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cos \theta & z(z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \sin \theta & 1 \end{vmatrix} \\ &= \left( \sqrt{z^2 - 1} \cos \theta, \sqrt{z^2 - 1} \sin \theta, -z \right)\end{aligned}$$

aponta para fora de  $S$ , concluímos que  $\mathbf{g}$  induz a orientação correspondente à normal exterior unitária, e que portanto o fluxo de  $\mathbf{F}$  para fora de  $S$  pode ser calculado a partir de

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 &= \\ &= \int_2^3 \int_0^{2\pi} \left( \sqrt{z^2 - 1} \cos \theta, \sqrt{z^2 - 1} \sin \theta, -z \right) \cdot \left( z\sqrt{z^2 - 1} \cos \theta, z\sqrt{z^2 - 1} \sin \theta, -z^2 \right) d\theta dz \\ &= \int_2^3 \int_0^{2\pi} (z^3 - z + z^3) d\theta dz = 60\pi.\end{aligned}$$

Alternativamente, podemos considerar a 2-forma

$$\Omega_{\mathbf{F}} = xzdy \wedge dz + yzdz \wedge dx - z^2dx \wedge dy$$

e integrá-la ao longo de  $S$ . Uma vez que

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^*\Omega_{\mathbf{F}} &= z\sqrt{z^2-1} \cos\theta d\left(\sqrt{z^2-1} \sin\theta\right) \wedge dz \\ &\quad + z\sqrt{z^2-1} \sin\theta dz \wedge d\left(\sqrt{z^2-1} \sin\theta\right) \\ &\quad - z^2 d\left(\sqrt{z^2-1} \cos\theta\right) \wedge d\left(\sqrt{z^2-1} \sin\theta\right) \\ &= z(z^2-1) \cos^2\theta d\theta \wedge dz - z(z^2-1) \sin^2\theta dz \wedge d\theta - z^2 z dz \wedge d\theta \\ &= (z^3 - z + z^3) d\theta \wedge dz, \end{aligned}$$

temos que

$$\int_S \Omega_{\mathbf{F}} = \int_2^3 \int_0^{2\pi} (2z^3 - z) d\theta dz = 6\pi,$$

em conformidade com o resultado anterior. Vimos através do cálculo do produto externo das colunas da matriz Jacobiana da parametrização que esta induz a orientação correspondente à normal unitária exterior; caso não tivéssemos feito este cálculo, poderíamos determinar qual a orientação induzida pela parametrização notando que uma base para o espaço normal a  $S$  no ponto  $(x, y, z)$  é dada por

$$\nabla(x^2 + y^2 - z^2 + 1) = (2x, 2y, -2z).$$

Apesar de a nossa superfície ser apenas o pedaço de hiperbolóide entre  $z = 2$  e  $z = 3$ , para efeitos de cálculo da orientação é mais simples considerar toda a folha em  $z > 0$ ; nesse caso, no ponto  $(0, 0, 1) = \mathbf{g}(0, 0)$  a normal exterior unitária é  $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ , e  $\Omega_{\mathbf{n}} = -dx \wedge dy$ . Uma vez que

$$\mathbf{g}^*\Omega_{\mathbf{n}} = -d\left(\sqrt{z^2-1} \cos\theta\right) \wedge d\left(\sqrt{z^2-1} \sin\theta\right) = -zdz \wedge d\theta = 1d\theta \wedge dz$$

para  $(\theta, z) = (0, 0)$ , e  $1 > 0$ , concluiríamos que  $\mathbf{g}$  induz a orientação correspondente a  $\mathbf{n}$ .

- (b) É fácil ver que  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ . A superfície  $S$  é um pedaço de um hiperbolóide cujo eixo é o eixo dos  $zz$ , e o seu bordo é constituído por uma circunferência  $C_1$  de raio  $\sqrt{3}$  contida no plano  $z = 2$  e uma circunferência  $C_2$  de raio  $\sqrt{8}$  contida no plano  $z = 3$ . Para aplicar o Teorema da Divergência (que só pode ser aplicado a superfícies que limitam volumes), adicionamos a  $S$  os dois círculos  $D_1$  e  $D_2$  contidos nos planos  $z = 2$  e  $z = 3$  e cujos bordos são  $C_1$  e  $C_2$ . A normal unitária indicada corresponde então à normal unitária exterior  $\mathbf{n}$  ao volume  $V$  limitado por  $D_1 \cup S \cup D_2$ . Note-se que, em  $D_1$ ,  $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$  e, em  $D_2$ ,  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ . Por outro lado,  $\mathbf{F}(x, y, 2) = (2x, 2y, -4)$  e  $\mathbf{F}(x, y, 3) = (3x, 3y, -9)$ . Pelo Teorema da Divergência tem-se então

$$\int_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 + \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 + \int_{D_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV_3 = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 &= - \int_{D_1} 4dV_2 - \int_{D_2} (-9)dV_2 \\ &= 9V_2(D_2) - 4V_2(D_1).\end{aligned}$$

Como  $D_1$  e  $D_2$  são círculos de raios  $\sqrt{3}$  e  $\sqrt{8}$ ,  $V_2(D_1) = 3\pi$  e  $V_2(D_2) = 8\pi$ , e portanto

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 = 72\pi - 12\pi = 60\pi,$$

em conformidade com o nosso cálculo anterior.

- (c) Note-se que  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ . Como  $\mathbf{F}$  está definido em  $E^3$ , que é um conjunto em estrela, concluímos que  $\mathbf{F}$  é um campo rotacional. Se  $\mathbf{A}$  é um potencial vector para  $\mathbf{F}$ , i.e., se  $\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{A}$ , então devemos ter

$$\Omega_{\mathbf{F}} = d\omega_{\mathbf{A}} \Leftrightarrow d\omega_{\mathbf{A}} = xzdy \wedge dz + yzdz \wedge dx - z^2dx \wedge dy,$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = xz \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = yz \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -z^2 \end{cases}$$

Como é sabido, o facto de o potencial vector estar definido a menos de um gradiente (ou equivalentemente de  $\omega_{\mathbf{A}}$  estar definido menos de uma derivada exterior) permite-nos sempre assumir que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo  $A_3 = 0$ . Então obtém-se

$$\begin{cases} -\frac{\partial A_2}{\partial z} = xz \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} = yz \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2 = -\frac{xz^2}{2} + f(x, y) \\ A_1 = \frac{yz^2}{2} + g(x, y) \\ -\frac{z^2}{2} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{z^2}{2} - \frac{\partial g}{\partial y} = -z^2 \end{cases}$$

Portanto podemos por exemplo escolher  $f = g = 0$ , e um potencial vector para  $\mathbf{G}$  é então

$$\mathbf{A} = \left( \frac{yz^2}{2}, -\frac{xz^2}{2}, 0 \right).$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} + \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g}$$

onde as orientações de  $C_1$  e  $C_2$  devem ser compatíveis com a normal unitária  $\mathbf{n}$ . Mais precisamente,  $C_1$  deve ser percorrida no sentido directo quando vista do semieixo positivo dos  $zz$ , e  $C_2$  no sentido inverso. Uma parametrização para  $C_1$  é  $\mathbf{g}(\theta) = (\sqrt{3} \cos \theta, \sqrt{3} \sin \theta, 2)$ , e portanto

$$\begin{aligned}\oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} &= \int_0^{2\pi} (2\sqrt{3} \sin \theta, -2\sqrt{3} \cos \theta, 0) \cdot (-\sqrt{3} \sin \theta, \sqrt{3} \cos \theta, 0) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-6) d\theta = -12\pi.\end{aligned}$$

Uma parametrização para  $C_2$  é  $\mathbf{g}(\theta) = (\sqrt{3} \cos \theta, \sqrt{3} \sin \theta, 1)$ ; o sentido de  $C_2$  correspondente a esta parametrização é no entanto o contrário àquele que pretendemos, pelo que

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} &= - \int_0^{2\pi} \left( \frac{9}{2} \sqrt{8} \sin \theta, -\frac{9}{2} \sqrt{8} \cos \theta, 0 \right) \cdot \left( -\sqrt{8} \sin \theta, \sqrt{8} \cos \theta, 0 \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 36 d\theta = 72\pi. \end{aligned}$$

Portanto mais uma vez concluímos que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 = 60\pi.$$

4. Seja

$$M = \left\{ (x, y, z) \in E^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1 \right\}$$

Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xe^{\sin z^2}, -ye^{\sin z^2}, z)$$

através de  $M$  no sentido da normal exterior.

**Resolução:**  $M$  é o bordo do toro sólido

$$T = \left\{ (x, y, z) \in E^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 \leq 1 \right\},$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = e^{\sin z^2} - e^{\sin z^2} + 1 = 1.$$

Logo

$$\int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dV_2 = \int_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV_3 = \int_T 1 dV_3 = V_3(T) = 2\pi \cdot 2 \cdot \pi 1^2 = 4\pi^2$$

(onde usámos o Teorema de Pappus).

5. Use o Teorema de Stokes para calcular  $\int_M \omega$  com a orientação correspondente à normal exterior, onde

$$M = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z \geq 0 \right\}$$

e

$$\omega = xe^{-z} dy \wedge dz + ye^{-z} dz \wedge dx$$

**Resolução:** Começamos por observar que o integral pedido é apenas o fluxo do campo  $\mathbf{F}_\omega = (e^{-z}x, e^{-z}y, 0)$  para fora da superfície cilíndrica infinita  $M$ , e que portanto o integral pedido será

$$\int_M \omega = \int_M (e^{-z}x, e^{-z}y, 0) \cdot (x, y, 0) dV_2 = \int_M e^{-z} dV_2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-z} d\theta dz = 2\pi.$$

No entanto, queremos usar o Teorema de Stokes para calcular o integral. Uma forma de o fazer é notar que

$$d\omega = 2e^{-z} dx \wedge dy \wedge dz.$$

Seja  $h > 0$  e

$$\begin{aligned} D_0 &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}; \\ M_h &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq h\}; \\ D_h &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = h\}; \\ A_h &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq h\}. \end{aligned}$$

Então  $\partial A_h = D_0 \cup M_h \cup D_h$  e portanto pelo Teorema de Stokes

$$\int_{A_h} d\omega = \int_{D_0} \omega + \int_{M_h} \omega + \int_{D_h} \omega.$$

A orientação correspondente à normal exterior em  $M_h$  induz em  $A_h$  a orientação usual (dada pelo elemento de volume  $dV_3 = dx \wedge dy \wedge dz$ ). Uma vez que  $\mathbf{F}_\omega$  é tangente a  $D_0, D_h$ ,  $\int_{D_0} \omega = \int_{D_h} \omega = 0$ , e portanto

$$\begin{aligned} \int_{M_h} \omega &= \int_{A_h} d\omega = \int_{A_h} 2e^{-z} dx \wedge dy \wedge dz = \int_{A_h} 2e^{-z} dx dy dz = \int_0^h \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2e^{-z} r d\theta dr dz = \\ &= 2\pi [r^2]_0^1 [-e^{-z}]_0^h = 2\pi (1 - e^{-h}). \end{aligned}$$

É fácil ver que por exemplo o Teorema da Convergência Dominada

$$\int_M \omega = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{M_h} \omega = \lim_{h \rightarrow +\infty} 2\pi (1 - e^{-h}) = 2\pi$$

(como teria que ser).

Outra forma de calcular o integral usando o Teorema de Stokes é a seguinte: como vimos,

$$d\omega - 2e^{-z} dx \wedge dy \wedge dz = 0 \Leftrightarrow d(\omega + 2e^{-z} dx \wedge dy) = 0$$

pelo que a 2-forma

$$\eta = \omega + 2e^{-z} dx \wedge dy$$

é fechada. Uma vez que o seu domínio ( $E^3$ ) é em estrela, concluímos que é exacta. Além disso o integral de  $e^{-z} dx \wedge dy$  ao longo de  $M$  corresponde ao fluxo do campo vertical  $(0, 0, 2e^{-z})$  através de  $M$ ; uma vez que este campo é tangente a  $M$ , o fluxo é nulo. Portanto

$$\int_M \omega = \int_M \eta.$$

Calculemos um potencial para  $\eta$ : se

$$\xi = \xi_1 dx + \xi_2 dy + \xi_3 dz$$

é tal que  $d\xi = \eta$  então devemos ter

$$d\xi = xe^{-z} dy \wedge dz + ye^{-z} dz \wedge dx + 2e^{-z} dx \wedge dy,$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_3}{\partial y} - \frac{\partial \xi_2}{\partial z} = xe^{-z} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x} = ye^{-z} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = 2e^{-z} \end{cases}$$

Como é sabido, o facto de o potencial estar definido a menos da derivada exterior de uma função permite-nos sempre assumir que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo  $\xi_2 = 0$ . Então obtém-se

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_3}{\partial y} = xe^{-z} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x} = ye^{-z} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = -2e^{-z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_3 = xye^{-z} + f(x, z) \\ 2ye^{-z} + \frac{\partial g}{\partial z} - ye^{-z} - \frac{\partial f}{\partial x} = ye^{-z} \\ \xi_1 = -2ye^{-z} + g(x, z) \end{cases}$$

Portanto podemos por exemplo escolher  $f(x, z) = g(x, z) = 0$ . Um potencial para  $\eta$  é então

$$\xi = -2ye^{-z}dx + xye^{-z}dz.$$

Apesar de  $M$  ser uma variedade com bordo,

$$\partial M = C_0 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 0\},$$

não podemos aplicar directamente o Teorema de Stokes, uma vez que este teorema só é válido para variedades com bordo compactas, i.e., limitadas (de certa forma,  $M$  possui parte do bordo “no infinito”). Podemos no entanto aplicá-lo a  $M_h$ , cujo bordo é  $\partial M_h = C_0 \cup C_h$ , com

$$C_h = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = h\}.$$

Pela regra da mão direita facilmente se conclui que a orientação correspondente à normal exterior em  $M$  induz a orientação que corresponde a percorrer  $C_0$  no sentido directo no plano  $xOy$  e  $C_h$  no sentido oposto. Portanto

$$\begin{aligned} \int_{M_h} \eta &= \oint_{C_0} \xi + \oint_{C_h} \xi = \int_{]0, 2\pi[} -2 \operatorname{sen} \theta d(\cos \theta) - \int_{]0, 2\pi[} -2 \operatorname{sen} \theta e^{-h} d(\cos \theta) \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta - e^{-h} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = 2\pi (1 - e^{-h}) \end{aligned}$$

e consequentemente

$$\int_M \omega = \int_M \eta = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{M_h} \eta = \lim_{h \rightarrow +\infty} 2\pi (1 - e^{-h}) = 2\pi.$$

6. Seja  $M = \{(x, y, z) \in E^3 : x = y^2 + z^2, x \leq 1\}$ . Usando o teorema de Stokes,

- Calcule  $\int_{M^\mu} zdx \wedge dy + xdz \wedge dy$  onde  $\mu$  é a orientação determinada pela normal a  $M$  que tem primeira componente positiva.
- Calcule  $\int_{\partial M} ydz$  sendo  $\partial M$  percorrida no sentido que visto da origem é a dos ponteiros do relógio.



**Resolução:**

(a) Claramente tem-se  $d(xzdy) = zdx \wedge dy + xdz \wedge dy$ , logo pelo teorema de Stokes,

$$\int_{M^\mu} zdx \wedge dy + xdz \wedge dy = \int_{\partial M^\nu} xzdy,$$

onde  $\nu$  é a orientação induzida em  $\partial M$  pela orientação de  $M$ . Tem-se

$$\partial M = \{(x, y, z) \in E^3 : x = y^2 + z^2, x = 1\} = \{(1, y, z) \in E^3 : y^2 + z^2 = 1\}.$$

Uma vez que a orientação dada a  $M$  corresponde à normal que aponta para dentro do parabolóide, pela regra da mão direita, a circunferência  $\partial M$  deve ser percorrida num sentido que, visto de um ponto no semieixo positivo dos  $xx$  longe da origem, parece o contrário ao dos ponteiros do relógio.

A parametrização  $\mathbf{g} : ]0, 2\pi[ \rightarrow \partial M$  definida por

$$\mathbf{g}(\theta) = (1, \cos \theta, \text{sen } \theta)$$

percorre  $\partial M$  no sentido desejado, logo

$$\begin{aligned} \int_{\partial M^\nu} xzdy &= \int_0^{2\pi} \mathbf{g}^*(xzdy) \\ &= \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta d(\cos \theta) \\ &= \int_0^{2\pi} -\text{sen}^2 \theta d\theta \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

(b) Pelo teorema de Stokes,

$$\int_{\partial M} ydz = \int_{M^\mu} dy \wedge dz$$

onde  $\mu$  é a orientação de  $M$  que induz a orientação dada em  $\partial M$ . Pela regra da mão direita vemos que  $\mu$  é a orientação correspondente à normal que tem componente segundo  $x$  positiva.

Uma parametrização para  $M$  é por exemplo  $\mathbf{g} : ]0, 1[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow M$  definida por

$$\mathbf{g}(r, \theta) = (r^2, r \cos \theta, r \text{sen } \theta).$$

Como

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2r & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -r \text{sen } \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}$$

a primeira componente de  $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta}$  é  $r > 0$ . Conclui-se que  $\mathbf{g}$  induz a orientação  $\mu$  e portanto,

$$\begin{aligned} \int_{M^\mu} dy \wedge dz &= \int_{]0,1[ \times ]0,2\pi[} \mathbf{g}^*(dy \wedge dz) \\ &= \int_{]0,1[ \times ]0,2\pi[} d(r \cos \theta) \wedge d(r \sin \theta) \\ &= \int_{]0,1[ \times ]0,2\pi[} (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= \int_{]0,1[ \times ]0,2\pi[} r dr \wedge d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r d\theta dr \\ &= \pi. \end{aligned}$$

7. Seja  $M = \{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ . Use o Teorema de Stokes para calcular  $\int_{M^\mu} (1 + z^2) dx \wedge dy$  onde  $\mu$  é a orientação determinada pela normal exterior à esfera.

**Resolução:**

A forma  $(1 + z^2) dx \wedge dy$  não é fechada e portanto não é exacta. No entanto, para  $(x, y, z) \in M$  temos

$$1 + z^2 = 1 + (1 - x^2 - y^2) = 2 - x^2 - y^2,$$

pelo que

$$\int_{M^\mu} (1 + z^2) dx \wedge dy = \int_{M^\mu} (2 - x^2 - y^2) dx \wedge dy.$$

A forma  $(2 - x^2 - y^2) dx \wedge dy$  é fechada em  $E^3$ , que é um conjunto em estrela, e portanto é exacta.

É fácil adivinhar um potencial para esta forma:  $d\left(\left(2x - \frac{1}{3}x^3\right) dy\right) = (2 - x^2) dx \wedge dy$  e  $d\left(\frac{1}{3}y^3 dx\right) = -y^2 dx \wedge dy$ , logo

$$\frac{1}{3}y^3 dx + \left(2x - \frac{1}{3}x^3\right) dy$$

é um potencial para  $(2 - x^2 - y^2) dx \wedge dy$ .

Pela regra da mão direita, a orientação  $\nu$  induzida por  $\mu$  em  $\partial M = \{(x, y, 0) \in E^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  é aquela que vista de um ponto com coordenada  $z$  positiva parece o sentido anti-horário. Uma parametrização para  $M$  é por exemplo  $\mathbf{g} : ]0, 2\pi[ \rightarrow \partial M$  dada por

$$\mathbf{g}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

e claramente a orientação induzida por esta parametrização é  $\nu$ . Pelo teorema de Stokes,

concluimos que

$$\begin{aligned}
 \int_{M^\mu} (1+z^2) dx \wedge dy &= \int_{M^\mu} (2-x^2-y^2) dx \wedge dy \\
 &= \int_{\partial M^\nu} \frac{1}{3} y^3 dx + \left(2x - \frac{1}{3} x^3\right) dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \sin^3 \theta d(\cos \theta) + \left(2 \cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta\right) d(\sin \theta) \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 2 \cos^2 \theta\right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3} (1 - 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + 2 \cos^2 \theta\right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta)\right) + 2 \cos^2 \theta\right) d\theta \\
 &= -\frac{1}{3} \left(2\pi - \frac{1}{2} \pi\right) + 2\pi = \frac{3\pi}{2},
 \end{aligned}$$

onde usamos a identidade

$$\cos^4 \theta + \sin^4 \theta = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 - 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = 1 - 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta.$$

8. Seja  $M = \{(x, y, z, w) \in E^4 : w^2 + 1 = x^2 + y^2 + z^2, 0 \leq w \leq 2\}$ . Calcule  $\int_{M^\mu} dx \wedge dy \wedge dz$  onde  $\mu$  é a orientação de  $M$  dada pela normal que aponta na direção do eixo dos  $w$ .

**Resolução:**

Seja

$$V = \{(x, y, z, w) \in E^4 : w^2 + 1 \geq x^2 + y^2 + z^2, 0 \leq w \leq 2\}.$$

Então  $V$  é um conjunto compacto e

$$\partial V = M \cup T_1 \cup T_2$$

onde

$$T_1 = \{(x, y, z, w) \in E^4 : w^2 + 1 \geq x^2 + y^2 + z^2, w = 0\} = \{(x, y, z, 0) \in E^4 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

e

$$T_2 = \{(x, y, z, w) \in E^4 : w^2 + 1 \geq x^2 + y^2 + z^2, w = 2\} = \{(x, y, z, 2) \in E^4 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 5\}.$$

Uma vez que  $d(dx \wedge dy \wedge dz) = 0$ , pelo teorema de Stokes tem-se

$$\int_{\partial V} dx \wedge dy \wedge dz = 0$$

qualquer que seja a orientação escolhida para  $\partial V$ . Pela aditividade do integral conclui-se que

$$\int_{M^\mu} dx \wedge dy \wedge dz + \int_{T_1^\mu} dx \wedge dy \wedge dz + \int_{T_2^\mu} dx \wedge dy \wedge dz = 0$$

onde  $\mu$  designa a orientação determinada em cada hipersuperfície pela normal interior a  $V$ . O espaço tangente a  $T_1$  e  $T_2$  é, em qualquer ponto,  $\{(x, y, z, 0) \in E^4\}$  pelo que  $dx \wedge dy \wedge dz$  é um elemento de volume para  $T_1$  e  $T_2$ . Resta saber se é o elemento de volume compatível com as orientações  $\mu$ . A normal unitária interior a  $T_1$  é  $(0, 0, 0, 1)$ , logo o elemento de volume correspondente à orientação determinada por esta normal é  $(-1)^{4-1} dx \wedge dy \wedge dz = -dx \wedge dy \wedge dz$ . Da mesma forma vemos que o elemento de volume para  $T_2$  determinado pela orientação  $\mu$  é  $dx \wedge dy \wedge dz$ . Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{M^\mu} dx \wedge dy \wedge dz &= - \int_{T_1^\mu} dx \wedge dy \wedge dz - \int_{T_2^\mu} dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \int_{T_1^\mu} -dx \wedge dy \wedge dz - \int_{T_2^\mu} dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \int_{T_1} dx dy dz - \int_{T_2} dx dy dz \\ &= V_3(T_1) - V_3(T_2) \\ &= \frac{4\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} \sqrt{5}^3. \end{aligned}$$

9. Seja

$$V = \{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left( -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, 0, 0 \right)$$

através de  $\partial V$  no sentido da normal exterior a  $V$ .

**Resolução:**

Não se pode aplicar directamente o teorema da divergência porque  $\mathbf{F}$  não é de classe  $C^1$  em  $V$ . No entanto, podemos aplicar o teorema da divergência a regiões

$$V_\epsilon = \{(x, y, z) \in E^3 : \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

e passar ao limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$ :

Temos  $\partial V = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup S$ , onde

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(x, y, 0) \in E^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}; \\ T_2 &= \{(0, y, z) \in E^3 : y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0, z \geq 0\}; \\ T_3 &= \{(x, 0, z) \in E^3 : x^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0\}; \\ S &= \{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}, \end{aligned}$$

Temos também  $\partial V_\epsilon = T_{1,\epsilon} \cup T_{2,\epsilon} \cup T_{3,\epsilon} \cup S \cup S_\epsilon$ , onde  $T_{i,\epsilon}$  designa a porção de  $T_i$  a uma distância  $\geq \epsilon$  da origem, e

$$S_\epsilon = \{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

O campo  $\mathbf{F}$  é paralelo a  $T_1$  e  $T_3$ , pelo que trivialmente temos para  $i = 1, 3$

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{T_{i,\epsilon}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \int_{T_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}.$$

Por outro lado  $\mathbf{F}$  é perpendicular a  $T_2$  pelo que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{T_{2,\epsilon}} \mathbf{F} \cdot (-1, 0, 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{T_{2,\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} dV_2.$$

Uma vez que a função  $\frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}}$  é integrável em  $T_2$  (como fácilmente se verifica utilizando coordenadas polares), pelo teorema da convergência monótona conclui-se que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{T_{2,\epsilon}} \mathbf{F} \cdot (-1, 0, 0) = \int_{T_2} \mathbf{F} \cdot (-1, 0, 0).$$

Finalmente, tem-se

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \right| &\leq \int_{S_\epsilon} |\mathbf{F}| dV_2 \\ &= \int_{S_\epsilon} \frac{1}{\epsilon} dV_2 \\ &= \frac{4\pi\epsilon^2}{8} \frac{1}{\epsilon} \\ &= \frac{\pi\epsilon}{2} \end{aligned}$$

pelo que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Uma vez que podemos aplicar o teorema da divergência a  $V_\epsilon$ , conclui-se que

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial V_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Ora

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

logo, usando coordenadas esféricas, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{V_\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \int_{V_\epsilon} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dV_3 \\ &= \int_\epsilon^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi}{r^3} r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\varphi dr \\ &= (1 - \epsilon) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \right) \\ &= (1 - \epsilon) \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{\pi}{4}.$$

10. Seja  $V \subset E^3$  uma variedade-3 com bordo compacta e  $\phi : V \times [0, +\infty[ \rightarrow E^3$  uma aplicação de classe  $C^1$ , tal que para cada  $t \in [0, +\infty[$  a aplicação  $\phi_t : V \rightarrow E^3$  dada por  $\phi_t(x, y, z) = \phi(x, y, z, t)$  é injectiva e com derivada injectiva.  $\phi$  modela a evolução de uma porção de fluido com o tempo: no instante  $t$ , o fluido ocupa a posição  $\phi_t(V)$  em  $E^3$ .

O campo vectorial  $\mathbf{v}_t : \phi_t(V) \rightarrow E^3$  definido por

$$\mathbf{v}_t(\phi_t(x, y, z)) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y, z, t).$$

designa-se por campo de velocidades do fluido.

Prove o **Teorema de Liouville**: Se  $\nabla \cdot \mathbf{v}_t = 0$  então para todo o  $T \geq 0$ , tem-se

$$V_3(\phi_T(V)) = V_3(\phi_0(V)).$$

Isto é, se a divergência do campo de velocidades é 0, então o volume ocupado pela porção de fluido mantém-se constante.

**Resolução:**

Começamos por observar que  $\psi : V \times [0, T] \rightarrow E^4$  dada por

$$\psi(x, y, z, t) = (\phi(x, y, z, t), t)$$

parametriza uma variedade com bordo  $M$  cujo bordo é

$$\partial M = \phi_0(V) \times \{0\} \cup \psi(\partial V \times [0, T]) \cup \phi_T(V) \times \{T\}.$$

e que

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\mathbf{v}_t, 1).$$

Uma vez que a última componente de  $\mathbf{v}$  é constante, temos  $\nabla \cdot \mathbf{v}_t = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . Além disso, uma vez que  $(0, 0, 0, \pm 1)$  são as normais unitárias a  $\phi_0(V) \times \{0\}$  e  $\phi_T(V) \times \{T\}$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} V_3(\phi_T(V)) - V_3(\phi_0(V)) &= \int_{\phi(V \times \{0\})} \mathbf{v} \cdot (0, 0, 0, -1) + \int_{\phi(V \times \{T\})} \mathbf{v} \cdot (0, 0, 0, 1) \\ &= \int_{\phi(V \times \{0\})} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \int_{\phi(V \times \{T\})} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{n}$  designa a normal exterior a  $M$ . Uma vez que  $\mathbf{v} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$  é claramente tangente a  $\psi(\partial V \times [0, T])$  (se fixarmos  $(x, y, z) \in \partial V$  então  $\psi(x, y, z, t)$  descreve uma curva em  $\psi(\partial V \times [0, T])$ ), obtemos do Teorema da Divergência

$$\begin{aligned} V_3(\phi_T(V)) - V_3(\phi_0(V)) &= \int_{\phi(V \times \{0\})} \mathbf{v} \cdot (0, 0, 0, -1) + \int_{\phi(V \times \{T\})} \mathbf{v} \cdot (0, 0, 0, 1) \\ &= \int_{\partial M} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dV_3 - \int_{\psi(\partial V \times [0, T])} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dV_3 \\ &= \int_M \nabla \cdot \mathbf{v} dV_4 - 0 = 0, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.