Resolução Sumária da 6^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

6 de Junho de 2006

1. Considere a superfície esférica de raio 1

$$S^2 = \{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

(a) Escreva uma parametrização para S^2 (excepto um meridiano) usando os ângulos das coordenadas esféricas. A carta correspondente a esta parametrização é por vezes usada nos planisférios.

Resolução: Por exemplo $\mathbf{g} :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to E^3$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta).$$

(b) Escreva uma parametrização para S^2 (excepto um meridiano) usando as coordenadas cilíndricas (θ, z). A carta correspondente a esta parametrização chama-se a *projecção cilíndrica.*

Resolução: Por exemplo $\mathbf{h} :]0, 2\pi[\times] - 1, 1[\to E^3$ dada por

$$\mathbf{h}(\theta, z) = \left(\sqrt{1 - z^2}\cos\theta, \sqrt{1 - z^2}\operatorname{sen}\theta, z\right)$$

(uma vez que em coordenadas cilíndricas a equação de S^2 se escreve $r^2 + z^2 = 1$).

(c) Mostre que

$$dV_2 = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

é um elemento de volume para S^2.

Resolução: Basta notar que $\mathbf{n} = (x, y, z)$ é um vector normal unitário em S^2.

(d) Calcule o *pull-back* deste elemento de volume por cada uma das parametrizações acima. Qual das projecções preserva áreas?

Resolução: Tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^* dV_2 &= \operatorname{sen}\theta d\theta \wedge d\varphi; \\ \mathbf{h}^* dV_2 &= d\theta \wedge dz. \end{aligned}$$

Portanto a projecção cilíndrica preserva áreas: a área da projecção de um conjunto é igual à área do conjunto.

2. Calcule $\int_M \omega$ com uma orientação à sua escolha usando o Teorema de Stokes, onde

(a) $\omega = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$ e $M = \{(x,y) \in E^2 : y = x^2, 0 < x < 1\}$;
Resolução: É fácil ver que $\omega = d(e^{xy})$. Pelo Teorema de Stokes

$$\int_M \omega = \int_M d(e^{xy}) = \int_{\partial M} e^{xy} = [e^{xy}]_{(0,0)}^{(1,1)} = e - 1.$$

(b) $\omega = dx \wedge dy$ e $M = \left\{(x,y) \in E^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\}$;
Resolução: É fácil ver que $\omega = d(xdy)$. Pelo Teorema de Stokes

$$\int_M \omega = \int_M d(xdy) = \int_{\partial M} xdy.$$

Uma parametrização para ∂M é por exemplo $\mathbf{g} :]0, 2\pi[\to E^2$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta) = (a\cos\theta, b\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

(não precisamos de nos preocupar com a orientação de ∂M, uma vez que a orientação no integral a calcular é à nossa escolha). Portanto

$$\int_M \omega = \int_{]0,2\pi[} a\cos\theta d(b\,\mathrm{sen}\,\theta) = \int_{]0,2\pi[} ab\cos^2\theta d\theta = ab\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = \pi ab$$

(como seria de esperar).

(c) $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx$ e $M = \{(x,y,z) \in E^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$;
Resolução: Neste caso ω não é exacta, mas $M = \partial B$, onde B é a bola aberta de raio 3 centrada na origem. Portanto pelo Teorema de Stokes

$$\begin{aligned}\int_M \omega = \int_{\partial B} \omega = \int_B d\omega &= \int_B dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dx \\ &= \int_B 2dx \wedge dy \wedge dz = 2V_3(B) = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi 3^2 = 24\pi.\end{aligned}$$

(d) $\omega = xdx \wedge dy$ e $M = \{(x,y,z) \in E^3 : z^2 = x^2 + y^2, 1 < z < 2\}$.
Resolução: É fácil ver que $\omega = d\left(\frac{x^2}{2}dy\right)$. Pelo Teorema de Stokes

$$\int_M \omega = \int_M d\left(\frac{x^2}{2}dy\right) = \int_{\partial M} \frac{x^2}{2}dy.$$

O bordo de M é a união das circunferências $\{x^2+y^2 = 1, z = 1\}$ e $\{x^2+y^2 = 4, z = 2\}$. Podemos escolher a orientação de uma delas arbitrariamente, mas uma vez feita essa escolha ela determina a orientação de M e portanto da outra circunferência. É fácil ver que se a circunferência contida no plano $z = 2$ for percorrida no sentido directo quando vista do semieixo positivo dos zz, a circunferência contida no plano $z = 1$ deverá ser percorrida no sentido inverso; portanto, usando as parametrizações $\mathbf{g}, \mathbf{h} :]0, 2\pi[\to E^3$ dadas por

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\theta) &= (2\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\theta, 2);\\ \mathbf{h}(\theta) &= (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 1),\end{aligned}$$

que correspondem à orientação no sentido directo, teremos

$$\int_M \omega = \int_{]0,2\pi[} \frac{4\cos^2\theta}{2} d(2\operatorname{sen}\theta) - \int_{]0,2\pi[} \frac{\cos^2\theta}{2} d(\operatorname{sen}\theta)$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{7}{2}\cos^3\theta d\theta = 0.$$

3. Calcule o fluxo do campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,-2z)$ para fora da superfície

$$S = \{(x,y,z) \in E^3 : x^2+y^2 = 1+2z^2,\ 0 \le z \le 1\}.$$

(a) Pela definição.

Resolução: Uma parametrização de S é por exemplo $\mathbf{g} :]0,2\pi[\times]0,1[\to E^3$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta,z) = \left(\sqrt{1+2z^2}\cos\theta, \sqrt{1+2z^2}\operatorname{sen}\theta, z\right),$$

uma vez que em coordenadas cilíndricas a equação que define S se escreve $r^2 = 1+2z^2$. Uma vez que

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial\theta} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\sqrt{1+2z^2}\operatorname{sen}\theta & \sqrt{1+2z^2}\cos\theta & 0 \\ 2z(1+2z^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\theta & 2z(1+2z^2)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\theta & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \left(\sqrt{1+2z^2}\cos\theta, \sqrt{1+2z^2}\operatorname{sen}\theta, -2z\right)$$

aponta para fora de S, concluímos que $\mathbf{g}$ induz a orientação correspondente à normal exterior unitária, e que portanto o fluxo de $\mathbf{F}$ para fora de S pode ser calculado a partir de

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dV_2 =$$
$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{1+2z^2}\cos\theta, \sqrt{1+2z^2}\operatorname{sen}\theta, -2z\right)\cdot\left(\sqrt{1+2z^2}\cos\theta, \sqrt{1+2z^2}\operatorname{sen}\theta, -2z\right) d\theta dz$$
$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} (1+2z^2+4z^2) d\theta dz = 6\pi.$$

Alternativamente, podemos considerar a 2-forma

$$\Omega_{\mathbf{F}} = xdy\wedge dz + ydz\wedge dx - 2zdx\wedge dy$$

e integrá-la ao longo de S. Uma vez que

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^*\Omega_{\mathbf{F}} &= \sqrt{1+2z^2}\cos\theta d\left(\sqrt{1+2z^2}\operatorname{sen}\theta\right)\wedge dz \\ &+ \sqrt{1+2z^2}\operatorname{sen}\theta dz\wedge d\left(\sqrt{1+2z^2}\operatorname{sen}\theta\right) \\ &- 2zd\left(\sqrt{1+2z^2}\cos\theta\right)\wedge d\left(\sqrt{1+2z^2}\operatorname{sen}\theta\right) \\ &= \left(1+2z^2\right)\cos^2\theta d\theta\wedge dz - \left(1+2z^2\right)\operatorname{sen}^2\theta dz\wedge d\theta - 4z^2 dz\wedge d\theta \\ &= \left(1+6z^2\right) d\theta\wedge dz,\end{aligned}$$

temos que

$$\int_S \Omega_{\mathbf{F}} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(1 + 6z^2\right) d\theta dz = 6\pi,$$

em conformidade com o resultado anterior. Vimos através do cálculo do produto externo das colunas da matriz Jacobiana da parametrização que esta induz a orientação correspondente à normal unitária exterior; caso não tivéssemos feito este cálculo, poderíamos determinar qual a orientação induzida pela parametrização notando que uma base para o espaço normal a S no ponto (x, y, z) é dada por

$$\nabla \left(x^2 + y^2 - 1 - 2z^2\right) = (2x, 2y, -4z).$$

Portanto no ponto $(1, 0, 0) = \mathbf{g}(0, 0)$ a normal exterior unitária é $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$, e $\Omega_{\mathbf{n}} = dy \wedge dz$. Uma vez que

$$\mathbf{g}^*\Omega_{\mathbf{n}} = d\left(\sqrt{1 + 2z^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) \wedge dz = \sqrt{1 + 2z^2}\cos\theta d\theta \wedge dz = 1 d\theta \wedge dz$$

para $(\theta, z) = (0, 0)$ e $1 > 0$, concluiríamos que $\mathbf{g}$ induz a orientação correspondente a $\mathbf{n}$.

(b) Usando o Teorema da Divergência.

Resolução: É fácil ver que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. A superfície S é um pedaço de um hiperbolóide cujo eixo é o eixo dos zz, e o seu bordo é constituído por uma circunferência C_1 de raio 1 contida no plano $z = 0$ e uma circunferência C_2 de raio $\sqrt{3}$ contida no plano $z = 1$. Para aplicar o Teorema da Divergência (que só pode ser aplicado a superfícies que limitam volumes), adicionamos a S os dois círculos D_1 e D_2 contidos nos planos $z = 0$ e $z = 1$ e cujos bordos são C_1 e C_2. A normal unitária indicada corresponde então à normal unitária exterior $\mathbf{n}$ ao volume V limitado por $D_1 \cup S \cup D_2$. Note-se que, em D_1, $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ e, em D_2, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Por outro lado, $\mathbf{F}(x, y, 0) = (x, y, 0)$ e $\mathbf{F}(x, y, 1) = (x, y, -2)$. Pelo Teorema da Divergência tem-se então

$$\int_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 + \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 + \int_{D_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV_3 = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 &= -\int_{D_1} 0 dV_2 - \int_{D_2} (-2) dV_2 \\ &= 2V_2(D_2).\end{aligned}$$

Como D_2 é um círculo de raio $\sqrt{3}$, $V_2(D_2) = 3\pi$, e portanto

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = 6\pi,$$

em conformidade com o nosso cálculo anterior.

(c) Usando o Teorema de Stokes para campos vectoriais.

Resolução: Note-se que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Como $\mathbf{F}$ está definido em E^3, que é um conjunto em estrela, concluímos que $\mathbf{F}$ é um campo rotacional. Se $\mathbf{A}$ é um potencial vector para $\mathbf{F}$, i.e., se $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$, então devemos ter

$$\Omega_{\mathbf{F}} = d\omega_{\mathbf{A}} \Leftrightarrow d\omega_{\mathbf{A}} = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx - 2z dx \wedge dy,$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = x \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -2z \end{cases}$$

Como é sabido, o facto de o potencial vector estar definido a menos de um gradiente (ou equivalentemente de $\omega_{\mathbf{A}}$ estar definido menos de uma derivada exterior) permite-nos sempre assumir que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo $A_3 = 0$. Então obtém-se

$$\begin{cases} -\frac{\partial A_2}{\partial z} = x \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} = y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2 = -xz + f(x,y) \\ A_1 = yz + g(x,y) \\ -z + \frac{\partial f}{\partial x} - z - \frac{\partial g}{\partial y} = -2z \end{cases}$$

Portanto podemos por exemplo escolher $f = g = 0$, e um potencial vector para $\mathbf{F}$ é então

$$\mathbf{A} = (yz, -xz, 0).$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} + \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g}$$

onde as orientações de C_1 e C_2 devem ser compatíveis com a normal unitária $\mathbf{n}$. Mais precisamente, C_1 deve ser percorrida no sentido directo quando vista do semieixo positivo dos zz, e C_2 no sentido inverso. Uma parametrização para C_1 é $\mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, e portanto

$$\oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} = \int_0^{2\pi} (0,0,0) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) \, d\theta = 0.$$

Uma parametrização para C_2 é $\mathbf{g}(\theta) = \left(\sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta, 1\right)$; o sentido de C_2 correspondente a esta parametrização é no entanto o contrário àquele que pretendemos, pelo que

$$\oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} = -\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta, -\sqrt{3}\cos\theta, 0\right) \cdot \left(-\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}\cos\theta, 0\right) \, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} 3 d\theta = 6\pi.$$

Portanto mais uma vez concluímos que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = 6\pi.$$

4. Considere a superfície

$$S = \left\{ (x,y,z) \in E^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1, \ 0 < z < 1 \right\}.$$

(a) Calcule o fluxo de $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+\cos(yz), y+e^{x^2+z^2}, z+1)$ através da superfície S, no sentido da normal unitária cuja terceira componente é negativa.

Resolução: Apesar do campo $\mathbf{F}$ ser algo complicado, é fácil ver que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$. Portanto será conveniente usar o Teorema da Divergência. A superfície S é um pedaço de um cone cujo eixo é o eixo dos zz, e o seu bordo é constituído por uma circunferência C_1 de raio 1 contida no plano $z=0$ e uma circunferência C_2 de raio 2 contida no plano $z=1$. Para aplicar o Teorema da Divergência (que só pode ser aplicado a superfícies que limitam volumes), adicionamos a S os dois círculos D_1 e D_2 contidos nos planos $z=0$ e $z=1$ e cujos bordos são C_1 e C_2. A normal unitária indicada corresponde então à normal unitária exterior $\mathbf{n}$ ao volume V limitado por $D_1 \cup S \cup D_2$. Note-se que, em D_1, $\mathbf{n} = (0,0,-1)$ e, em D_2, $\mathbf{n} = (0,0,1)$. Por outro lado, $\mathbf{F}(x,y,0) = (x+1, y+e^{x^2}, 1)$ e $\mathbf{F}(x,y,1) = (x+\cos y, y+e^{x^2+1}, 2)$. Pelo Teorema da Divergência tem-se então

$$\int_{D_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dV_2 + \int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dV_2 + \int_{D_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dV_2 = \int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV_3,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dV_2 &= \int_V 3 dV_3 - \int_{D_1} (-1) dV_2 - \int_{D_2} 2 dV_2 \\ &= 3V_3(V) + V_2(D_1) - 2V_2(D_2).\end{aligned}$$

Como D_1 e D_2 são círculos de raios 1 e 2, $V_2(D_1) = \pi$ e $V_2(D_2) = 4\pi$. Por outro lado,

$$V_3(V) = \int_0^1 \int_0^{z+1} \int_0^{2\pi} r\, d\theta\, dr\, dz = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{z+1} dz = \frac{7\pi}{3}.$$

Logo,

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dV_2 = 3\cdot\frac{7\pi}{3} + \pi - 2\cdot 4\pi = 0.$$

(b) Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial $\mathbf{G}(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$ através de S, no sentido da normal unitária cuja terceira componente é negativa.

Resolução: Note-se que $\nabla\cdot\mathbf{G} = 0$. Como $\mathbf{G}$ está definido em E^3, que é um conjunto em estrela, concluímos que $\mathbf{G}$ é um campo rotacional. Se $\mathbf{A}$ é um potencial vector para $\mathbf{G}$, i.e., se $\mathbf{G} = \nabla\times\mathbf{A}$, então devemos ter

$$\Omega_{\mathbf{G}} = d\omega_{\mathbf{A}} \Leftrightarrow d\omega_{\mathbf{A}} = (y+z)dy\wedge dz + (x+z)dz\wedge dx + (x+y)dx\wedge dy,$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = y+z \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = x+z \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = x+y \end{cases}$$

Como é sabido, o facto de o potencial vector estar definido a menos de um gradiente permite-nos sempre assumir que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo $A_2 = 0$. Então obtém-se

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} = y + z \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = x + z \\ \frac{\partial A_1}{\partial y} = -x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_3 = \frac{y^2}{2} + zy + f(x,z) \\ \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} = x + z \\ A_1 = -xy - \frac{y^2}{2} + g(x,z) \end{cases}$$

Portanto podemos por exemplo escolher $f(x,z) = 0$ e $g(x,z) = xz + \frac{z^2}{2}$. Um potencial vector para $\mathbf{G}$ é então

$$\mathbf{A} = \left(xz + \frac{z^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2}, 0, \frac{y^2}{2} + zy \right).$$

Note-se que neste caso seria talvez mais simples notar que

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbf{G}} &= (y+z)dy \wedge dz + (x+z)dz \wedge dx + (x+y)dx \wedge dy \\ &= d\left(\left(\frac{y^2}{2} + yz \right) dz \right) + d\left(\left(\frac{z^2}{2} + xz \right) dx \right) + d\left(\left(\frac{x^2}{2} + xy \right) dy \right) \\ &= d\left(\left(\frac{z^2}{2} + xz \right) dx + \left(\frac{x^2}{2} + xy \right) dy + \left(\frac{y^2}{2} + yz \right) dz \right) \end{aligned}$$

para obter o potencial vector

$$\mathbf{B} = \left(\frac{z^2}{2} + xz, \frac{x^2}{2} + xy, \frac{y^2}{2} + yz \right).$$

Este potencial difere de $\mathbf{A}$ por

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \left(xy + \frac{y^2}{2}, \frac{x^2}{2} + xy, 0 \right) = \nabla \left(\frac{x^2 y + xy^2}{2} \right).$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} + \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g}$$

onde as orientações de C_1 e C_2 devem ser compatíveis com a normal unitária $\mathbf{n}$. Mais precisamente, C_1 deve ser percorrida no sentido directo quando vista do semieixo positivo dos zz, e C_2 no sentido inverso. Uma parametrização para C_1 é $\mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, e portanto

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} &= \int_0^{2\pi} \left(-\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}, 0, \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2} \right) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^3\theta \right) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Uma parametrização para C_2 é $\mathbf{g}(\theta) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 1)$; o sentido de C_2 correspondente a esta parametrização é no entanto o contrário àquele que pretendemos, pelo que

$$\oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(2\cos\theta + \frac{1}{2} - 2\operatorname{sen}^2\theta - 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta, 0, 2\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\right) \cdot (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 0)d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(-4\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}^3\theta + 8\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\right) d\theta = 0.$$

Portanto

$$\int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = 0.$$

5. (a) Usando a correspondência

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \frac{\partial}{\partial r} \sim dr \sim (rd\theta) \wedge (r\operatorname{sen}\theta d\varphi) \\
\mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \sim rd\theta \sim (r\operatorname{sen}\theta d\varphi) \wedge dr \\
\mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \sim r\operatorname{sen}\theta d\varphi \sim dr \wedge (rd\theta)
\end{aligned}$$

escreva o *Laplaciano* de f, $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$, em coordenadas esféricas.

Resolução: Temos

$$\begin{aligned}
\nabla f \sim df &= \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial\varphi}d\varphi \\
&\sim \frac{\partial f}{\partial r}r^2\operatorname{sen}\theta d\theta \wedge d\varphi + \frac{\partial f}{\partial\theta}\operatorname{sen}\theta d\varphi \wedge dr + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}dr \wedge d\theta
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
&(\nabla \cdot \nabla f)dr \wedge (rd\theta) \wedge (r\operatorname{sen}\theta d\varphi) = (\nabla^2 f)r^2\operatorname{sen}\theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi \\
&= d\left(r^2\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial r}d\theta \wedge d\varphi + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}d\varphi \wedge dr + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}dr \wedge d\theta\right) \\
&= \left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right) dr \wedge d\theta \wedge d\varphi,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}.$$

(b) Determine todas a soluções da *equação de Laplace* $\nabla^2 f = 0$ que só dependem da coordenada radial r.

Resolução: Se f só depende de r, a equação de Laplace fica

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right) = 0 \Leftrightarrow r^2\frac{df}{dr} = A \Leftrightarrow \frac{df}{dr} = \frac{A}{r^2} \Leftrightarrow f = -\frac{A}{r} + B$$

onde $A, B \in \mathbb{R}$ são constantes.

6. Um determinado processo reversível corresponde a percorrer a curva

$$C = \left\{(V,p) : (V-2)^2 + (p-2)^2 = 1\right\}$$

no sentido directo. Calcule o trabalho total realizado sobre o sistema durante este processo, i.e., calcule $\int_C \omega$ com a orientação indicada, onde $\omega = -pdV$.

Resolução: Temos $C = \partial B$, onde

$$B = \left\{(V,p) : (V-2)^2 + (p-2)^2 \leq 1\right\}.$$

Pelo Teorema de Stokes, e atendendo a que a orientação da curva corresponde à orientação usual do plano (V,p), temos

$$\int_C -pdV = \int_B d(-pdV) = \int_B -dp \wedge dV = \int_B dp \wedge dV = V_2(B) = \pi.$$

7. O campo de velocidades de um fluido é da forma $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_\theta$, onde (r,θ,z) são coordenadas cilíndricas em E^3, e deve satisfazer as equações de $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Determine a expressão geral de $u(r)$.

Resolução: Usando a correspondência

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \frac{\partial}{\partial r} \sim dr \sim (rd\theta) \wedge dz \\
\mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \sim rd\theta \sim dz \wedge dr \\
\mathbf{e}_z &= \frac{\partial}{\partial z} \sim dz \sim dr \wedge (rd\theta)
\end{aligned}$$

notamos que $\mathbf{u}$ corresponde à 1-forma $\omega_\mathbf{u} = urd\theta$ e à 2-forma $\Omega_\mathbf{u} = udz \wedge dr$. Consequentemente,

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow d\omega_\mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(ru)}{\partial r} dr \wedge d\theta + r\frac{\partial u}{\partial z} dz \wedge d\theta = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(ru)}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow d\Omega_\mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta \wedge dz \wedge dr = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$$

Portanto

$$ru = A \Leftrightarrow u = \frac{A}{r}$$

para alguma constante $A \in \mathbb{R}$.

Note-se que portanto $\omega_\mathbf{u} = Ad\theta$. O escoamento correspondente a este campo de velocidades chama-se um *vórtice*, e pode ser (aproximadamente) observado por exemplo quando se abre o ralo de uma banheira, ou no ar proximo das pontas das asas de um avião em dias húmidos. Note-se que $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ é equivalente a dizer que o momento angular de cada pedacinho de fluido é zero - isto apesar de globalmente o fluido estar a rodar em torno do eixo dos zz. Uma experiência clássica é colocar um pequeno objecto flutuante em forma de cruz num destes escoamentos e ver que ele de facto não roda.

8. O campo eléctrico gerado por uma carga pontual possui simetria esférica, $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$, onde r é a coordenada radial esférica, e deve satisfazer as equações de Maxwell no vácuo, $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ e $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Determine a expressão geral de $E(r)$.

   Resolução: Mais uma vez notamos que $\mathbf{E}$ corresponde à 1-forma $\omega_{\mathbf{E}} = Edr$ e à 2-forma $\Omega_{\mathbf{E}} = Er^2 \operatorname{sen}\theta d\theta \wedge d\varphi$. Consequentemente,

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \Leftrightarrow d\omega_{\mathbf{E}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E}{\partial \theta} d\theta \wedge dr + \frac{\partial E}{\partial \varphi} d\varphi \wedge dr = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0$$

   e

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow d\Omega_{\mathbf{E}} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta \frac{\partial (r^2 E)}{\partial r} dr \wedge d\theta \wedge d\varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial (r^2 E)}{\partial r} = 0.$$

   Portanto

$$r^2 E = A \Leftrightarrow E = \frac{A}{r^2}$$

   para alguma constante $A \in \mathbb{R}$.

9. Dado um campo eléctrico $\mathbf{E} = E^1\mathbf{e}_1 + E^2\mathbf{e}_2 + E^3\mathbf{e}_3$ e um campo magnético $\mathbf{B} = B^1\mathbf{e}_1 + B^2\mathbf{e}_2 + B^3\mathbf{e}_3$ dependentes do tempo t, define-se em E^4 com coordenadas (t, x, y, z) a 2-forma

$$F = E^1 dx \wedge dt + E^2 dy \wedge dt + E^3 dz \wedge dt + B^1 dy \wedge dz + B^2 dz \wedge dx + B^3 dx \wedge dy$$

   (dita o *tensor de Faraday*). Mostre que F é fechada *sse* $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ satisfazem as *equações de Maxwell homogéneas* $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.

   Resolução: Se $\omega_{\mathbf{E}}$ e $\Omega_{\mathbf{B}}$ representarem a 1-forma e 2-forma associadas a $\mathbf{E}$ e a $\mathbf{B}$ *em* E^3 *com coordenadas* (x, y, z), vemos que

$$F = \omega_{\mathbf{E}} \wedge dt + \Omega_{\mathbf{B}}$$

   e consequentemente

$$dF = \partial\omega_{\mathbf{E}} \wedge dt + \partial\Omega_{\mathbf{B}} + dt \wedge \Omega_{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} = \Omega_{\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \wedge dt + (\nabla \cdot \mathbf{B}) dx \wedge dy \wedge dz.$$

   onde ∂ representa a derivada exterior em E^3 com coordenadas (x, y, z) (e t constante). Portanto $dF = 0$ *sse* as equações de Maxwell homogéneas são satisfeitas.

10. Mostre que $E^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ não é difeomorfo a E^3 (**Sugestão:** *Use o resultado do exercício 8 para construir uma 2-forma fechada mas não exacta em* $E^3 \setminus \{(0,0,0)\}$).

    Resolução: Considere-se a 2-forma $\Omega_{\mathbf{E}}$. Esta forma é fechada, uma vez que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Contudo, não é exacta: por exemplo, o fluxo de $\mathbf{E}$ através da superfície esférica $r = 1$ é obviamente

$$\int_{\{r=1\}} A\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r dV_2 = \int_{\{r=1\}} A dV_2 = AV_2(\{r=1\}) = 4\pi A$$

    que não é zero se $A \neq 0$. Portanto,

$$\int_{\{r=1\}} \Omega_{\mathbf{E}} = 4\pi A \neq 0$$

    se $A \neq 0$ (onde usámos a orientação da superfície esférica correspondente à normal exterior). Como $\Omega_{\mathbf{E}}$ está bem definida em $E^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, concluímos que este conjunto possui 2-formas fechadas que não são exactas, não podendo portanto ser difeomorfo a nenhum conjunto em estrela.