Resolução Sumária da 4^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

26 de Novembro de 2001

1. Mostre que se $f : A \subset E^n \to [0, +\infty[$ é mensurável então o conjunto

$$B = \left\{(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) \in E^{n+1} : (x^1, \dots, x^n) \in A, 0 \le x^{n+1} \le f(x^1, \dots, x^n)\right\}$$

satisfaz $V_{n+1}(B) = \int_A f dV_n$. Use este resultado para calcular a medida dos seguintes conjuntos ilimitados:

Resolução: Pelo Teorema de Fubini temos

$$V_{n+1}(B) = \int_B 1 dV_{n+1} = \int_A \int_0^{f(x^1,\dots,x^n)} 1 dx^{n+1} dV_n = \int_A f(x^1, \dots, x^n) dV_n.$$

(a) $\left\{(x, y) \in E^2 : x \ge 1, |y| \le \dfrac{1}{x^2}\right\}$;

Resolução: A área deste conjunto é portanto

$$2 \int_{[1,+\infty[} \frac{1}{x^2} dx = 2 \lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = 2 \lim_{n\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 2 \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2.$$

(b) $\left\{(x, y) \in E^2 : x \ge e, |y| \le \dfrac{1}{\log x}\right\}$;

Resolução: A área deste conjunto é

$$2 \int_{[e,+\infty[} \frac{1}{\log x} dx = 2 \lim_{n\to+\infty} \int_e^n \frac{1}{\log x} dx = 2 \lim_{n\to+\infty} \int_1^{\log n} \frac{1}{y} e^y dy.$$

A função integranda $f(y) = \frac{1}{y} e^y$ satisfaz

$$f'(y) = \frac{1}{y} e^y - \frac{1}{y^2} e^y = (y - 1) \frac{1}{y^2} e^y > 0 \text{ para } y > 1,$$

e portanto no conjunto de integração $f(y) \ge f(1) = e$. Logo a medida do conjunto é maior ou igual que

$$2 \lim_{n\to+\infty} \int_1^{\log n} e\, dy = 2 \lim_{n\to+\infty} e(\log n - 1) = +\infty,$$

e portanto é $+\infty$.

(c) $\left\{(x, y, z) \in E^3 : 0 \le z \le e^{-x^2-y^2}\right\}$.

Resolução: O volume deste conjunto é

$$\int_{E^2} e^{-x^2-y^2} dV_2 = \lim_{n\to+\infty} \int_{\{x^2+y^2\le n^2\}} e^{-x^2-y^2} dV_2 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta dr$$
$$= 2\pi \lim_{n\to+\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^n = \pi \lim_{n\to+\infty} \left(1 - e^{-n^2}\right) = \pi.$$

2. Decida se as funções seguintes são ou não integráveis nos conjuntos indicados, e calcule os integrais caso existam:

   (a) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ em $[1, +\infty[$;

   Resolução: Recorde-se que uma função é integrável *sse* o seu módulo o for. Uma vez que $|\operatorname{sen} x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ para

$$x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} [\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{3\pi}{4} + n\pi] \subset [1, +\infty[$$

   é imediata a conclusão de que

$$\int_{[1,+\infty[} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} dx \geq \int_{\bigcup_{n=1}^{+\infty}[\frac{\pi}{4}+n\pi, \frac{3\pi}{4}+n\pi]} \frac{\sqrt{2}}{2x} dx \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\frac{3\pi}{4} + n\pi} \frac{\pi}{2} = +\infty,$$

   e portanto a função não é integrável.

   (b) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ em $\left\{(x, y) \in E^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\right\}$;

   Resolução: Uma vez que a função não muda de sinal, temos

$$\int_{\{0<x^2+y^2<1\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dV_2 = \lim_{n\to+\infty} \int_{\left\{\frac{1}{n^2}\le x^2+y^2\le 1\right\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dV_2$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r d\theta dr = 2\pi \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \pi.$$

   (c) $\dfrac{e^{-x^2-y^2-z^2}}{x^2+y^2+z^2}$ em $E^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

   Resolução: Uma vez que a função não muda de sinal, temos

$$\int_{E^3} \frac{e^{-x^2-y^2-z^2}}{x^2+y^2+z^2} dV_3 = \lim_{n\to+\infty} \int_{\left\{\frac{1}{n^2}\le x^2+y^2+z^2\le n^2\right\}} \frac{e^{-x^2-y^2-z^2}}{x^2+y^2+z^2} dV_3$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^n \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \frac{1}{r^2} r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = 2\pi \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \int_{[0,+\infty[} e^{-r^2} dr =$$
$$= 4\pi \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 2\pi^{\frac{3}{2}}.$$

3. Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $F(x) = \int_1^{x^3} e^{-xt^2} dt \quad (x > 0);$

Resolução: Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra de Leibniz, temos

$$F'(x) = e^{-x\left(x^3\right)^2} + \int_1^{x^3} (-t^2) e^{-xt^2} dt = e^{-x^7} - \int_1^{x^3} t^2 e^{-xt^2} dt.$$

(b) $G(x) = \int_{\log x}^{x} \frac{e^{-x^2t^2}}{t} dt \quad (x > 1).$

Resolução: Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra de Leibniz, temos

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{e^{-x^2x^2}}{x} - \frac{e^{-x^2(\log x)^2}}{\log x} + \int_{\log x}^{x} (-2xt^2) \frac{e^{-x^2t^2}}{t} dt \\ &= \frac{e^{-x^4}}{x} - \frac{e^{-x^2(\log x)^2}}{\log x} - 2x \int_{\log x}^{x} t e^{-x^2t^2} dt. \end{aligned}$$

4. Calcule os seguintes integrais para todo o $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx;$

Resolução: Começamos por notar que

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \lim_{n \to +\infty} \left[-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \right]_0^n = \frac{1}{\alpha}$$

e que portanto aplicando a Regra de Leibniz

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{d^n}{d\alpha^n} \left(\frac{1}{\alpha} \right) \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} (-x)^n e^{-\alpha x} dx = \frac{(-1)^n n!}{\alpha^{n+1}}.$$

Fazendo $\alpha = 1$ vem

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!.$$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{\left(1+x^2\right)^{n+1}} dx.$

Resolução: Começamos por notar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\alpha x^2} dx = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\alpha} x\right)}{\sqrt{\alpha}} \right]_{-n}^n = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$$

e que portanto aplicando a Regra de Leibniz

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\alpha x^2} dx = \frac{d^n}{d\alpha^n} \left(\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \right) \Leftrightarrow$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n n! x^{2n}}{\left(1+\alpha x^2\right)^{n+1}} dx = \pi (-1)^n \frac{1}{2} \frac{3}{2} \dots \frac{2n-1}{2} \alpha^{\frac{2n-3}{2}}.$$

Fazendo $\alpha = 1$ vem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{\left(1+x^2\right)^{n+1}} dx = \pi \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3}{2^n n!}.$$

5. Considere as funções

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt; \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt; \qquad F(x) = f^2(x) + g(x).$$

(a) Mostre que F é constante.

Resolução: Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra de Leibniz, temos

$$F'(x) = 2f(x)f'(x) + g'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + \int_0^1 \frac{-2x(t^2+1)e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt$$
$$= 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2} x dt = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = 0$$

onde fizémos a mudança de variável $u = xt$ no segundo integral.

(b) Mostre que $\lim_{x\to 0} F(x) = \frac{\pi}{4}$.

Resolução: A função integranda em $g(x)$ é majorada pela função constante igual a 1, que é integrável em $[0, 1]$. Podemos portanto aplicar o Teorema da Convergência Dominada para concluir que

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \int_0^1 \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Uma vez que o integral indefinido de uma função contínua é contínuo, a função f é contínua e portanto $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. Logo $\lim_{x\to 0} F(x) = 0^2 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

(c) Mostre que $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$.

Resolução: Podemos novamente aplicar o Teorema da Convergência Dominada em $g(x)$ para concluir que

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \int_0^1 \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

(d) Conclua que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Resolução: Uma vez que F é constante e $\lim_{x\to 0} F(x) = \frac{\pi}{4}$, vemos que $F(x) = \frac{\pi}{4}$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{x\to +\infty} F(x) = \lim_{x\to +\infty} f^2(x) + g(x) = \left(\lim_{x\to +\infty} f(x)\right)^2 + 0.$$

Como a integranda em $f(x)$ não muda de sinal, temos

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6. Calcule os seguintes produtos exteriores:

(a) $(dx+dy)\wedge(dx-dy)$;
Resolução: $-dx\wedge dy+dy\wedge dx=-2dx\wedge dy$.

(b) $(dx+2dy+3dz)\wedge(dx-\frac{1}{2}dy+dz)$;
Resolução: $-\frac{1}{2}dx\wedge dy+dx\wedge dz+2dy\wedge dx+2dy\wedge dz+3dz\wedge dx-\frac{3}{2}dz\wedge dy=-\frac{5}{2}dx\wedge dy-2dx\wedge dz+\frac{7}{2}dy\wedge dz$.

(c) $(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy)\wedge(yz^2dx+x^2zdy+xy^2dz)$;
Resolução: $xyz^2dy\wedge dz\wedge dx+yx^2zdz\wedge dx\wedge dy+zxy^2dx\wedge dy\wedge dz=xyz\,(x+y+z)\,dx\wedge dy\wedge dz$.

(d) $(dx^1\wedge dx^2+dx^3\wedge dx^4)\wedge(dx^1\wedge dx^3-3dx^2\wedge dx^4)$.
Resolução: 0.

7. Dado um vector

$$\mathbf{v}=v^1\mathbf{e}_1+v^2\mathbf{e}_2+v^3\mathbf{e}_3\in E^3$$

definimos o 1-covector

$$\omega_{\mathbf{v}}=v^1dx^1+v^2dx^2+v^3dx^3$$

e o 2-covector

$$\Omega_{\mathbf{v}}=v^1dx^2\wedge dx^3+v^2dx^3\wedge dx^1+v^3dx^1\wedge dx^2.$$

Mostre que

(a) $\omega_{\mathbf{v}}\wedge\omega_{\mathbf{w}}=\Omega_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}$, onde $\times$ designa o produto externo de vectores em E^3;
Resolução: Tem-se

$$\begin{aligned}&\omega_{\mathbf{v}}\wedge\omega_{\mathbf{w}}=\left(v^1dx^1+v^2dx^2+v^3dx^3\right)\wedge\left(w^1dx^1+w^2dx^2+w^3dx^3\right)\\&=(v^2w^3-v^3w^2)dx^2\wedge dx^3+(v^3w^1-v^1w^3)dx^3\wedge dx^1+(v^1w^2-v^2w^1)dx^1\wedge dx^2\\&=\Omega_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}},\end{aligned}$$

já que o produto externo de $\mathbf{v}$ por $\mathbf{w}$ é dado por

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_3\\v^1&v^2&v^3\\w^1&w^2&w^3\end{vmatrix}=(v^2w^3-v^3w^2)\mathbf{e}_1+(v^3w^1-v^1w^3)\mathbf{e}_2+(v^1w^2-v^2w^1)\mathbf{e}_3.$$

(b) $\omega_{\mathbf{v}}\wedge\Omega_{\mathbf{w}}=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$.
Resolução: Tem-se

$$\begin{aligned}&\omega_{\mathbf{v}}\wedge\Omega_{\mathbf{w}}=\left(v^1dx^1+v^2dx^2+v^3dx^3\right)\wedge\left(w^1dx^2\wedge dx^3+w^2dx^3\wedge dx^1+w^3dx^1\wedge dx^2\right)\\&=\left(v^1w^1+v^2w^2+v^3w^3\right)dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3.\end{aligned}$$

8. Mostre que

$$dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)=\det(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n).$$

Resolução: Sabemos que

$$dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}=k!\,\mathrm{Alt}\left(dx^{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{i_k}\right).$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) &= n! \operatorname{Alt}\left(dx^1 \otimes \ldots \otimes dx^n\right)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \\
&= n! \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(dx^1 \otimes \ldots \otimes dx^n\right)(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) dx^1\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)}\right) \ldots dx^n\left(\mathbf{v}_{\sigma(n)}\right) \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) v^1_{\sigma(1)} \ldots v^n_{\sigma(n)} = \det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n).
\end{aligned}
$$

9. Calcule os *pull-backs* pelas funções indicadas das seguintes formas diferenciais:

   (a) $yzdx + xzdy + xydz$ pela função $(x, y, z) = \mathbf{g}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$;
   Resolução: Tem-se

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}^*(yzdx + xzdy + xydz) &= t \cos t d(\operatorname{sen} t) + t \operatorname{sen} t d(\cos t) + \operatorname{sen} t \cos t d(t) \\
&= t \cos^2 t dt - t \operatorname{sen}^2 t dt + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2t) dt = \left[t \cos(2t) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2t)\right] dt.
\end{aligned}
$$

   (b) $-ydx + xdy$ pela função $(x, y) = \mathbf{g}(r, \theta) = (r \operatorname{sen} \theta, r \cos \theta)$;
   Resolução: Tem-se

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{g}^*(-ydx + xdy) = -r \operatorname{sen} \theta d(r \cos \theta) + r \cos \theta d(r \operatorname{sen} \theta) \\
&= -r \operatorname{sen} \theta \cos \theta dr + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta + r \cos \theta \operatorname{sen} \theta dr + r^2 \cos^2 \theta d\theta = r^2 d\theta.
\end{aligned}
$$

   (c) $dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$ pela função $(x, y, z) = \mathbf{g}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, \theta)$;
   Resolução: Tem-se

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{g}^*(dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx) = d(r \cos \theta) \wedge d(r \operatorname{sen} \theta) + d(r \operatorname{sen} \theta) \wedge d\theta + d\theta \wedge d(r \cos \theta) \\
&= (\cos \theta dr - r \operatorname{sen} \theta d\theta) \wedge (\operatorname{sen} \theta dr + r \cos \theta d\theta) + \operatorname{sen} \theta dr \wedge d\theta + \cos \theta d\theta \wedge dr \\
&= r \cos^2 \theta dr \wedge d\theta - r \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \wedge dr + (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta) dr \wedge d\theta \\
&= (r + \operatorname{sen} \theta - \cos \theta) dr \wedge d\theta.
\end{aligned}
$$

   (d) $dx \wedge dy \wedge dz$ pela função $(x, y, z) = \mathbf{g}(r, \theta, \varphi) = (r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, r \cos \theta)$.
   Resolução: Tem-se

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{g}^*(dx \wedge dy \wedge dz) = d(r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi) \wedge d(r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi) \wedge d(r \cos \theta) \\
&= (\operatorname{sen} \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi d\varphi) \\
&\quad \wedge (\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi dr + r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi d\theta + r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi d\varphi) \wedge (\cos \theta dr - r \operatorname{sen} \theta d\theta) \\
&= -r^2 \operatorname{sen}^3 \theta \cos^2 \varphi dr \wedge d\varphi \wedge d\theta + r^2 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta \cos^2 \varphi d\theta \wedge d\varphi \wedge dr \\
&\quad + r^2 \operatorname{sen}^3 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi \wedge dr \wedge d\theta - r^2 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi \wedge d\theta \wedge dr \\
&= (r^2 \operatorname{sen}^3 \theta + r^2 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta) dr \wedge d\theta \wedge d\varphi = r^2 \operatorname{sen} \theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi.
\end{aligned}
$$

10. Calcule as derivadas exteriores das seguintes formas diferenciais:

(a) $yzdx + xzdy + xydz$;
Solução: 0.

(b) $-ydx + xdy$;
Solução: $2dx \wedge dy$.

(c) $zdx \wedge dy + xdy \wedge dz + ydz \wedge dx$;
Solução: $3dx \wedge dy \wedge dz$.

(d) $x^1x^2x^3x^4(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4 + dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4)$.
Solução: $(-x^1x^2x^3 + x^1x^2x^4 - x^1x^3x^4 + x^2x^3x^4)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$.