2^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

18 de Outubro de 2001

1. Mostre que os seguintes conjuntos são variedades e indique a respectiva dimensão:

   (a) $\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$;
   (b) $\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 = x + y + z = 1\}$;
   (c) $\{(x, y, z, w) \in E^4 : z = e^{x^2+y^2}, w = \cos(xy)\}$.

2. Calcule o espaço tangente e o espaço normal a cada uma das variedades seguintes nos pontos indicados:

   (a) $\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$, em $(1, 0, 0)$;
   (b) $\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 = x + y + z = 1\}$, em $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2})$;
   (c) $\{(x, y, z, w) \in E^4 : z = e^{x^2+y^2}, w = \cos(xy)\}$, em $(0, 0, 1, 1)$.

3. Escreva a equação do plano ortogonal à curva

$$\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1, 3x + 4y - 5z = 0\}$$

   no ponto $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$.

4. Escreva 4 como uma soma de 4 números reais positivos cujo produto seja máximo.

5. Que dimensões deverá ter uma caixa rectangular de volume V, aberta numa das faces, por forma a que a área da sua superfície seja mínima?

6. Determine o comprimento dos semieixos da elipse de equação $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$ (**Sugestão:** *Recorde que os eixos de uma elipse a intersectam nos pontos em que a distância ao centro é máxima/mínima*).

7. Calcule o máximo e o mínimo da função $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ na região $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

8. Sejam A e B conjuntos mensuráveis limitados. Mostre que:

   (a) $V(A \setminus B) = V(A) - V(A \cap B)$;
   (b) $V(A \cup B) = V(A) + V(B) - V(A \cap B)$;

9. Mostre que o conjunto $\{(x, y) \in E^2 : x = y\}$ tem medida nula.

10. Seja $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma enumeração dos números racionais contidos no intervalo $]0,1[$. Dado $\varepsilon > 0$, considere os conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{n=1}^{+\infty}]q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}[; \\ B &=]0,1[\cap A; \\ C &= [0,1] \setminus B. \end{aligned}$$

(a) Mostre que B é um conjunto aberto contendo todos os racionais em $]0,1[$.

(b) Mostre que $V(B) \leq 2\varepsilon$.

(c) Mostre que $\partial B \supset C$, onde ∂B designa a fronteira de B.

(d) Conclua que para ε suficientemente pequeno o conjunto B é um conjunto aberto cuja fronteira tem medida positiva.