Resolução Sumária da 1^{a} Ficha de Exercícios de AMIII

15 de Setembro de 2003

1. Seja $F(x,y) = f(x,xy)$ (com $f : E^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2). Exprima a derivada parcial mista F_{12} à custa de derivadas parciais de f.
   Resolução: Tem-se por exemplo
   $$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f_1(x,xy) \cdot 1 + f_2(x,xy) \cdot y$$
   e portanto
   $$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = f_{12}(x,xy)x + f_{22}(x,xy)xy + f_2(x,xy).$$

2. Seja $F(x,y) = f(x,y,g(x,y))$ (com $f : E^3 \to \mathbb{R}$ e $g : E^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2). Exprima as derivadas parciais de ordens 1 e 2 de F à custa de derivadas parciais de f e g.
   Resolução: Mais uma vez,
   $$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y,g(x,y)) + f_3(x,y,g(x,y))g_1(x,y);$$
   $$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y,g(x,y)) + f_3(x,y,g(x,y))g_2(x,y);$$
   $$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f_{11} + f_{13}g_1 + f_{31}g_1 + f_{33}(g_1)^2 + f_3 g_{11};$$
   $$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = f_{12} + f_{13}g_2 + f_{32}g_1 + f_{33}g_2 g_1 + f_3 g_{12};$$
   $$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = f_{22} + f_{23}g_2 + f_{32}g_2 + f_{33}(g_2)^2 + f_3 g_{22}.$$

3. Sejam $f : E^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to E^n$ funções diferenciáveis.
   (a) Mostre que a derivada de $f \circ \mathbf{g}$ é a derivada direccional de f segundo $\frac{d\mathbf{g}}{dt}$.
   Resolução: Pela regra da derivada da composta e pelo teorema acerca de derivadas direccionais de funções diferenciáveis, ambas as quantidades acima são iguais a
   $$Df \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt}.$$
   (b) Mostre que dado $\mathbf{x}_0 \in E^n$ tal que $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, o máximo do conjunto
   $$\{D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) : \|\mathbf{v}\| = 1\} \subset \mathbb{R}$$

é atingido exactamente quando

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}.$$

(Por outras palavras, o gradiente indica a direcção de crescimento máximo da função).
Resolução: Trata-se de uma consequência imediata do facto de que

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = Df(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$$

e da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

4. Sejam $f : E^3 \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to E^3$ definidas por

$$\begin{aligned} & f(x,y,z) = 5(x-2)^2 + 5(y-1)^2 + 2(x-2)(y-1) + z^2 \\ & \mathbf{g}(t) = (\cos(t), \cos(t), \operatorname{sen}(t)) \end{aligned}$$

   (a) Em que pontos a curva parametrizada por $\mathbf{g}$ é vertical?
   Resolução: O vector tangente à curva é

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = (-\operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t, \cos t).$$

   Este vector é vertical para $\operatorname{sen} t = 0$, i.e., para $t = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Portanto a curva é vertical nos pontos $(1,1,0)$ e $(-1,-1,0)$ (note-se que a curva é fechada).

   (b) Em que pontos a superfície definida pela equação $f = 1$ é horizontal?
   Resolução: O vector

$$\nabla f = (10(x-2) + 2(y-1), 10(y-1) + 2(x-2), 2z)$$

   é ortogonal à superfície; portanto a superfície será horizontal nos pontos em que ∇f for vertical, i.e., nos pontos da superfície em que

$$\begin{cases} 10(x-2) + 2(y-1) = 0 \\ 10(y-1) + 2(x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

   Como nestes pontos se tem

$$f(2,1,z) = 1 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1,$$

   concluimos que a superfície é horizontal nos pontos $(2,1,\pm 1)$.

5. Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijectiva e de classe C^1 cuja inversa não seja de classe C^1.
   Resolução: Por exemplo $f(x) = x^3$ é bijectiva e C^∞; contudo, $f'(0) = 0$ e consequentemente f^{-1} não pode ser diferenciável na origem.

6. Seja $\mathbf{f} : E^2 \to E^2$ definida por

$$\mathbf{f}(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y).$$

(a) Mostre que **f** é *localmente invertível*, i.e., que dado um ponto qualquer $\mathbf{x}_0 \in E^2$ existe uma vizinhança $V \ni \mathbf{x}_0$ na qual **f** é invertível.
Resolução: Pelo Teorema da Função Inversa, basta verificar que o Jacobiano de $\mathbf{f}$ nunca se anula:

$$J\mathbf{f}(x,y) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0.$$

(b) Será **f** globalmente invertível? Justifique.
Resolução: Não, porque não é injectiva: $\mathbf{f}(x,y) = \mathbf{f}(x, y+2\pi)$.

(c) Calcule $D\mathbf{f}^{-1}(1,0)$.
Resolução: Pelo Teorema da Função Inversa, e notando que $(1,0) = \mathbf{f}(0,0)$,

$$D\mathbf{f}^{-1}(1,0) = [D\mathbf{f}(0,0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Seja $\mathbf{f} :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\to E^2$ definida por

$$\mathbf{f}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta).$$

(a) Mostre que **f** é localmente invertível.
Resolução: Pelo Teorema da Função Inversa, basta verificar que o Jacobiano de $\mathbf{f}$ nunca se anula no domínio de $\mathbf{f}$:

$$J\mathbf{f}(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \neq 0.$$

(b) Será **f** globalmente invertível? Justifique.
Resolução: Sim.

(c) Sendo $(x,y) = \mathbf{f}(r,\theta)$, calcule $D\mathbf{f}^{-1}(x,y)$.
Resolução: Pelo Teorema da Função Inversa,

$$D\mathbf{f}^{-1}(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ r\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

onde $(r,\theta) = \mathbf{f}^{-1}(x,y)$.

8. Seja $\mathbf{f} : E^3 \to E^3$ definida por

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2).$$

(a) Determine todos os pontos para os quais o Teorema da Função Inversa garante a existência de uma inversa local para **f**.
Resolução: Uma vez que

$$J\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{vmatrix} 0 & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = 16xyz,$$

vemos que o Teorema da Função Inversa garante a existência de uma inversa local na vizinhança de todos os pontos fora dos planos coordenados.

(b) Será **f** globalmente invertível? Justifique.
Resolução: Não, porque $\mathbf{f}$ não é injectiva: por exemplo, $\mathbf{f}(-x,y,z) = \mathbf{f}(x,y,z)$.

(c) Calcule $D\mathbf{f}^{-1}(2,2,2)$, onde $\mathbf{f}^{-1}$ é a inversa local de $\mathbf{f}$ numa vizinhança do ponto $(1,1,1)$.
Resolução: Pelo Teorema da Função Inversa, e notando que $f(1,1,1) = (2,2,2)$, temos

$$D\mathbf{f}^{-1}(1,1,1) = [D\mathbf{f}(1,1,1)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

9. Considere a função $F : E^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = x^3 + x^2 - y^2.$$

(a) Quais os pontos da curva de nível $F^{-1}(0)$ em que o Teorema da Função Implícita não garante a existência de uma vizinhança na qual o conjunto é da forma $y = f(x)$?
Resolução: Tratam-se dos pontos da curva de nível para os quais

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Os pontos da curva de nível para os quais $y = 0$ devem satisfazer

$$x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1;$$

logo, os pontos pedidos são os pontos $(-1,0)$ e $(0,0)$.

(b) Esboce o conjunto de nível $F^{-1}(0)$. O que pode dizer sobre os pontos que determinou na alínea anterior?
Resolução: Trata-se de uma curva em forma de "α", sendo o ponto mais à esquerda o ponto $(-1,0)$ e o ponto duplo o ponto $(0,0)$. Em nenhuma vizinhança de nenhum destes pontos é possível representar a curva como o gráfico de uma função $y = f(x)$, já que cada valor de x corresponderia a dois valores de y.

(c) Seja f a função cujo gráfico descreve $F^{-1}(0)$ numa vizinhança do ponto $(3,6)$. Calcule $f'(3)$.
Resolução: Tem-se

$$F(x,f(x)) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - [f(x)]^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 2f(x)f'(x) = 0.$$

Como $f(3) = 6$, tem-se

$$27 + 6 - 12f'(3) = 0 \Leftrightarrow f'(3) = \frac{11}{4}.$$

10. Considere a função $\mathbf{F} : E^4 \to E^2$ definida por

$$\mathbf{F}(x,y,z,w) = (y^2 + w^2 - 2xz, y^3 + w^3 + x^3 - z^3).$$

(a) Mostre que existe uma vizinhança do ponto $(1,-1,1,1)$ na qual o conjunto de nível $\mathbf{F}^{-1}(0,0)$ é dado por $x = f(y,w), z = g(y,w)$.
Resolução: Basta ver que

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial(x,z)} = \begin{bmatrix} -2z & -2x \\ 3x^2 & -3z^2 \end{bmatrix}$$

e que

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

(b) Calcule as derivadas parciais de f e g no ponto $(-1,1)$.
Resolução: Temos

$$\mathbf{F}(f(y,w), y, g(y,w), w) = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial(y,w)} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial(x,z)} \cdot \frac{\partial(f,g)}{\partial(y,w)} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 2y & 2w \\ 3y^2 & 3w^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2z & -2x \\ 3x^2 & -3z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_y & f_w \\ g_y & g_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No ponto $(1,-1,1,1)$ esta igualdade fica

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_y & f_w \\ g_y & g_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_y & f_w \\ g_y & g_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} f_y & f_w \\ g_y & g_w \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} f_y & f_w \\ g_y & g_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$