

Análise Matemática III

1^o Teste

Cursos de Matemática e Engenharia Electrotécnica, Mecânica e Física

7 de Novembro de 1996

Apresente todos os cálculos

1 Considere o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, (x-1)^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

e uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em S . Escreva $\iint_S f$ em termos de integrais iterados da forma

(3,0) a) $\int(\int \cdots dx) dy.$

(3,0) b) $\int(\int \cdots dy) dx.$

(3,0) c) $\int(\int \cdots dr) d\theta$ em que r, θ são as coordenadas polares usuais.

(3,0) 2 Considere

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

e $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{-3/4} \sqrt{1 - y^2}.$$

Calcule $\iiint_V f$.

3 Calcule justificadamente

(2,0) a) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(t/k)^2}}{1+t^2} dt$

(1,5) b) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(t/k)^2}}{1+|t|} dt$

(1,5) c) $\lim_{k \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N}} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\cos^k(xy)}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$

4 Sejam $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e limitada em \mathbb{R} e considere $H(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} g\left(\frac{t}{1+e^{-x^2}}\right) dt$. Mostre que:

(1,0) a) H está bem definida em \mathbb{R} .

(1,0) b) Se g for diferenciável com derivada limitada então H é diferenciável. Obtenha uma expressão integral para H' em termos de g' .

(1,0) c) Mostre que a derivada de H existe mesmo que g não seja diferenciável. Obtenha uma expressão integral para H' em termos de g .