

# Análise Matemática III

## 1º Teste

Cursos de Matemática e Engenharia Electrotécnica, Mecânica e Física

7 de Novembro de 1996

### Apresente todos os cálculos

**1** Considere o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, (x - 1)^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

e uma função  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em  $S$ . Escreva  $\iint_S f$  em termos de integrais iterados da forma

(3,0) a)  $\int(\int \cdots dx) dy.$

(3,0) b)  $\int(\int \cdots dy) dx.$

(3,0) c)  $\int(\int \cdots dr) d\theta$  em que  $r, \theta$  são as coordenadas polares usuais.

(3,0) **2** Considere

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

e  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{-3/4} \sqrt{1 - y^2}.$$

Calcule  $\iiint_V f$ .

**3** Calcule justificadamente

(2,0) a)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(t/k)^2}}{1+t^2} dt$

(1,5) b)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(t/k)^2}}{1+|t|} dt$

(1,5) c)  $\lim_{k \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N}} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\cos^k(xy)}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$

**4** Sejam  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável e limitada em  $\mathbb{R}$  e considere  $H(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} g\left(\frac{t}{1+e^{-x^2}}\right) dt$ . Mostre que:

(1,0) a)  $H$  está bem definida em  $\mathbb{R}$ .

(1,0) b) Se  $g$  for diferenciável com derivada limitada então  $H$  é diferenciável. Obtenha uma expressão integral para  $H'$  em termos de  $g'$ .

(1,0) c) Mostre que a derivada de  $H$  existe mesmo que  $g$  não seja diferenciável. Obtenha uma expressão integral para  $H'$  em termos de  $g$ .