Análise Matemática III
2º semestre
1º Teste

Todos os cursos

3 de Maio de 1997

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1 Seja $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + |y| \le 1,\ x + z \le 1,\ x \ge 0,\ z \ge 0\}$ e $f : V \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Exprima o integral $\iiint_V f$ em termos de integrais iterados

(4,0) a) $\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots} f(x,y,z)\, dz)dy)dx$.

(4,0) a) $\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots} f(x,y,z)\, dx)dy)dz$.

(3,0) **2** Calcule o volume da região definida por

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2+y^2)^{1/4} \le z \le \frac{1}{2}(1 + \sqrt{x^2+y^2}) \le 1\}.$$

(3,0) **3** Considere a transformação de coordenadas definida para $x > 0$ e $y > 0$ por

$$\begin{cases} u = y^2/x \\ v = x^2/y \end{cases}$$

e a região $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge y^2,\ x \le y \le 2x^2\}$. Use esta transformação de coordenadas para calcular o integral

$$\iint_A \frac{e^{x^2/y}}{1 - x^2/y}\, dx\, dy.$$

(2,0) **4** Seja $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$. Calcule em função de $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{k \to +\infty} \iint_B \frac{\cos((x^2+y^2)/k)}{(x^2+y^2)^\alpha}\, dx\, dy$$

5 Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, $\lambda > 0$ e $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}$.

(2,0) a) Mostre que E_λ é mensurável. **Sugestão**:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(f(x)/\lambda)^{2k}}{(f(x)/\lambda)^{2k} + 1}.$$

(2,0) b) Suponha que $\int_{E_\lambda} 1 \le 1/(1+\lambda^3)$ para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostre que f é integrável em $\mathbb{R}^n$.