Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Teste - 14 de Maio de 99 - 20h00

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < y < x \ ; \ x^2 + y^2 < 1\}$$

(3) a) Escreva uma expressão para a área de S em termos de integrais iterados da forma: $\int \left(\int dy \right) dx$

(3) b) Para o caso em que a densidade é dada por $\rho(x,y) = xy$, calcule o momento de inércia de S em relação ao eixo dos xx.

(4) 2. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + z^2 < y < 1\}$$

e a funÁo $f : S \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}$.

Decida sobre a integrabilidade da função f em S e, em caso afirmativo, calcule o respectivo integral $\int_S f$.

(4) 3. Prove que o integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\pi - 2x}}{\cos x} \, dx$$

existe.

(3) 4. Considere o conjunto

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1 \ ; \ x > 0\}$$

Determine, justificadamente, os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais o integral

$$\int_X \frac{x}{(1+x^2)(xy)^\alpha} \, dxdy$$

existe.

(3) 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável.

Prove que se tem

$$\lim_{t \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) cos(xt) dx = 0$$