Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º Exame - 3 de Fevereiro de 2000 - 9 horas
Duração: 3h

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $g(x,y) = (x, y - x^2)$ e o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 < y < x^2 \, ; \, |x| < 1\}$$

(3) a) Mostre que g é uma transformação de coordenadas em $\mathbb{R}^2$.

(3) b) Usando a transformação g calcule o integral

$$\int\int_S \frac{1}{1 + (y - x^2)^2} dxdy$$

2. Considere o subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \, ; \, -2 < z < \frac{1}{2} \, ; \, z < \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$$

(3) a) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(3) b) Calcule a massa de S sabendo que a densidade é dada por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2+y^2}, & \text{se } \; -2 < z < 0 \\ 1, & \text{se } \; 0 \leq z < \frac{1}{2} \end{cases}$$

3. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \, ; \, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\}$$

Calcule a área de S usando o teorema de Green e o campo vectorial dado por

$$F(x,y) = (-y, x)$$

Volte S. F. F. $\longrightarrow$

(3) 4. Determine o rectângulo de perímetro igual a um cuja área é máxima.

5. Seja

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \,;\, z < 1\}$$

e

$$F(x, y, z) = (f(z)y, -f(z)x, x^2 + y^2)$$

em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e $f(1) = 1$.

(3) a) Descreva S parametricamente e calcule a respectiva área.

(3) b) Calcule o fluxo do rotacional de F através de S segundo a normal com terceira componente positiva.

(3) c) Calcule o fluxo de F através de S segundo a normal com terceira componente negativa.

(3) 6. a) Decida se a função $f(x, y, z) = \dfrac{z}{(x^2 + y^2)^{3/4}}$ é integrável no conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \,;\, 0 < z < 1\}$$

e, em caso afirmativo, calcule o respectivo integral.

(3) b) Calcule o limite seguinte

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^{\pi} \arctan\left(\frac{1}{1 + x^{2k}}\right) dx$$