

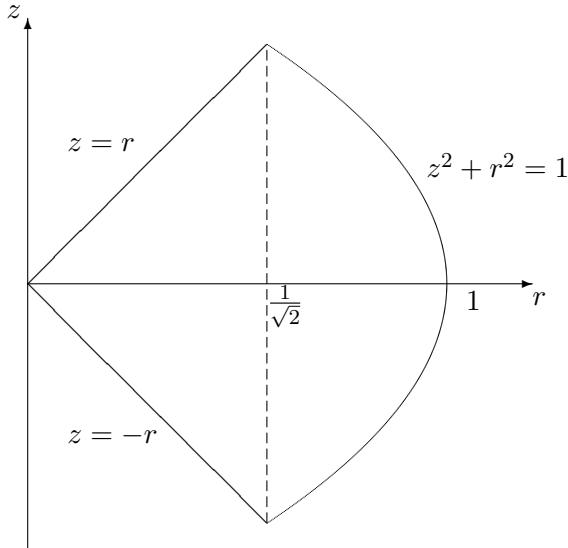
### Análise Matemática III

Resolução do 2º Teste e 1º Exame - 20 de Janeiro 2000 - 9 horas

1. O sólido tem simetria cilíndrica em torno do eixo Oz. A expressão de  $S$  em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  é:

$$r^2 + z^2 \leq 1; r^2 \geq z^2 \Leftrightarrow r \geq |z|$$

portanto  $S$  é o sólido que se obtém rodando a seguinte figura em torno do eixo Oz:



- a) Em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , o sólido escreve-se

$$r^2 \leq 1; r^2 \sin^2 \phi \geq r^2 \cos^2 \phi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}$$

portanto uma expressão para o volume em coordenadas esféricas é dada por:

$$\text{Vol}(S) = \int_S 1 = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta$$

- b) Tendo em conta a figura acima, a expressão para o volume em coordenadas cilíndricas é dada por

$$\text{Vol}(S) = \int_S 1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-r}^r r dz dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\theta$$

- c) A massa é dada pelo integral de volume da densidade de massa. Vamos usar coordenadas esféricas porque são as coordenadas em que o volume se expressa de forma mais simples. Como  $z = r \cos \phi$  temos

$$\begin{aligned} \int_S z^2 &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 r^2 \cos^2 \phi r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 r^4 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \phi \cos^2 \phi d\phi \\ &= 2\pi \frac{1}{5} \left[ -\frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi \sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

2. Uma vez que  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ , a expressão da função integranda e da região de integração sugerem a mudança de variáveis linear

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

Esta transformação  $g(x, y) = (x + y, x - y)$  é de facto uma transformação de coordenadas em  $\mathbb{R}^2$ : o determinante da matriz que representa a transformação é

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Portanto  $g$  é bijectiva. Como  $g$  é igual à sua derivada  $Dg$ , é  $C^1$  e tem derivada injetiva. Portanto é uma transformação de coordenadas. O jacobiano da transformação inversa é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = -\frac{1}{2}$$

e nas novas coordenadas  $(u, v)$  a região  $A$  escreve-se

$$\begin{aligned} x + y < 1 &\Leftrightarrow u < 1 \\ y > 0 &\Leftrightarrow \frac{u - v}{2} > 0 \Leftrightarrow u > v \\ y < x &\Leftrightarrow x - y > 0 \Leftrightarrow v > 0 \end{aligned}$$

Pelo teorema de mudança de variáveis, temos<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \int_A e^{-(x+y)^4} (x^2 - y^2) dx dy &= \int_0^1 \int_0^u e^{-u^4} uv \frac{1}{2} dv du \\ &= \int_0^1 \frac{u^3}{4} e^{-u^4} du = \left[ -\frac{1}{16} e^{-u^4} \right]_0^1 = \frac{1}{16} \left( 1 - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Note que a escolha da ordem de integração nas novas variáveis é importante. Na outra ordem não se consegue calcular o integral.

3. Seja  $L$  a recta com equação cartesiana  $x + y = 4$ . Temos de achar o mínimo sobre  $E$  da função  $d(x, y) = \text{“distância de } (x, y) \text{ à recta } L\text”$ . A distância à recta é medida sobre a recta perpendicular a  $L$  que passa pelo ponto  $(x, y)$ . Esta recta tem equação paramétrica

$$(x, y) + t(1, 1), t \in \mathbb{R}$$

(já que  $(1, 1)$  é um vector perpendicular a  $L$ ). O ponto de intersecção com a recta  $L$  corresponde ao parâmetro  $t$  tal que

$$x + t + y + t = 4 \Leftrightarrow t = 2 - \frac{1}{2}(x + y)$$

A distância de  $(x, y)$  a  $L$  é o comprimento do vector  $t(1, 1)$  para esse valor do parâmetro  $t$ , isto é

$$\|(2 - \frac{1}{2}(x + y), 2 - \frac{1}{2}(x + y))\| = \sqrt{2}|2 - \frac{1}{2}(x + y)|$$

Uma vez que sobre  $E$  (uma elipse com semieixos de comprimento  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{3}$ ) temos  $2 - \frac{1}{2}(x + y) > 0 \Leftrightarrow x + y < 4$ , a expressão de  $d(x, y)$  sobre  $E$  é

$$d(x, y) = 2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$$

Para minimizarmos esta função sobre  $E$  usamos o método dos multiplicadores de Lagrange. Seja  $g(x, y) = 2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) - \lambda(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - 1)$ . Então um ponto de mínimo de  $d$  sobre  $E$  tem de ser solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - x\lambda = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}y\lambda = 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}\lambda} \\ y = -\frac{3}{2\sqrt{2}\lambda} \\ (\frac{1}{4} + \frac{3}{8})\frac{1}{\lambda^2} = 1 \end{cases}$$

onde usámos o facto de que  $\lambda$  não se pode anular devido às duas primeiras equações do sistema. Este sistema tem soluções

$$(x, y, \lambda) = \pm \left( -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \right)$$

Como  $d$  é uma função contínua e  $E$  é compacto, pelo teorema de Weierstrass  $d$  tem máximo e mínimo em  $E$  e pelo método dos multiplicadores de Lagrange estes têm de ser atingidos nos pontos

$$(x, y) = \pm \left( -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}} \right)$$

Como  $d(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}) = 2\sqrt{2} + \frac{5}{\sqrt{10}}$  e  $d(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}) = 2\sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{10}}$  concluímos que o ponto de  $E$  mais próximo de  $L$  é o ponto

$$(x, y) = \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}} \right)$$

4. a) Seja  $F(x, y, z) = z - \cos(x^2 + y^2)$ . Então  $M$  é definida pela equação cartesiana  $F(x, y, z) = 0$  portanto um vector normal a  $M$  no ponto  $(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0, 0)$  é dado por  $\nabla F(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0, 0)$ . Ora

$$\nabla F(x, y, z) = (2x\operatorname{sen}(x^2 + y^2), 2y\operatorname{sen}(x^2 + y^2), 1)$$

portanto

$$T_{(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0, 0)} M^\perp = \{t(\sqrt{2\pi}, 0, 1) : t \in \mathbb{R}\}$$

e o espaço tangente é o complemento ortogonal deste, isto é

$$T_{(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0, 0)} M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{2\pi}x + z = 0\}$$

- b)  $M$  é um pedaço do gráfico da função  $\cos(x^2 + y^2)$  portanto uma parametrização para  $M$  é dada por

$$g(x, y) = (x, y, \cos(x^2 + y^2)); x^2 + y^2 < \pi$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2x\operatorname{sen}(x^2 + y^2) \\ 0 & 1 & -2y\operatorname{sen}(x^2 + y^2) \end{vmatrix} \\ &= (2x\operatorname{sen}(x^2 + y^2), 2y\operatorname{sen}(x^2 + y^2), 1) \end{aligned}$$

Portanto uma expressão para a área de  $M$  é dada por

$$\begin{aligned} \int_M 1 &= \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{\pi-x^2}}^{\sqrt{\pi-x^2}} \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right\| dy dx \\ &= \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{\pi-x^2}}^{\sqrt{\pi-x^2}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)\operatorname{sen}^2(x^2 + y^2)} dx dy \end{aligned}$$

5. a) Podemos aplicar o teorema da divergência ao volume

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, y > 0\}$$

A fronteira de  $V$  é  $\partial V = S \cup D$  onde  $D$  é a “tampa”

$$D = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1\}$$

Como a normal a  $S$  dada é a normal interior a  $V$ , e a normal a  $D$  unitária exterior a  $V$  é  $(0, -1, 0)$ , o teorema da divergência diz que

$$\int_V \operatorname{div} F = - \int_S F \cdot n + \int_D F \cdot (0, -1, 0)$$

isto é

$$\int_S F \cdot n = \int_D -yz^2 - \int_V z^2$$

O primeiro termo é 0 porque a função integranda é constante igual a 0 em  $D$ . Para calcular o segundo termo podemos usar coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}\int_V z^2 &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^1 r^2 \cos^2 \phi r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{1}{5} \sin \phi \cos^2 \phi d\phi \\ &= \frac{2\pi}{15}\end{aligned}$$

A conclusão é que o fluxo de  $F$  através de  $S$  no sentido indicado é

$$\int_S F \cdot n = -\frac{2\pi}{15}$$

- b) Para calcular o fluxo de  $\text{rot}G$  podemos usar o teorema de Stokes.  
Este teorema diz que

$$\int_S \text{rot}G \cdot n = \oint_{\partial S} G$$

onde  $\partial S$  é percorrida no sentido dado pela regra da mão direita. O bordo de  $S$  é a circunferência

$$\partial S = \{(x, 0, z) : x^2 + z^2 = 1\}$$

e a regra da mão direita aplicada à normal  $n$  diz que  $\partial S$  deve ser percorrida no sentido que visto do eixo negativo dos  $y$  é contrário ao dos ponteiros do relógio. Assim uma parametrização para  $\partial S$  é dada por

$$g(t) = (\cos t, 0, \text{sent}), 0 < t < 2\pi$$

e

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} G &= \int_0^{2\pi} (-\alpha \text{sent} + \cos t, \sqrt{\alpha}, \alpha \cos t + \text{sent}) \cdot (-\text{sent}, 0, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \alpha dt \\ &= 2\pi\alpha\end{aligned}$$

Concluímos que para que o fluxo de  $\text{rot}G$  seja igual a  $10\pi$  é necessário que  $\alpha = 5$ .

6. a) Seja  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}}$ .

Há duas razões porque não podemos calcular directamente o integral de  $f$ . Uma é que a região de integração é ilimitada e a outra é que a função  $f$  não é limitada numa vizinhança de 0. Assim vamos usar o teorema da convergência monótona para escrever o integral

como o limite de uma sucessão de integrais que podemos calcular directamente.

Seja  $f_k : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  a sucessão de funções definidas por

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}} & \text{se } \frac{1}{k} \leq x \leq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então para todo o  $k$ ,  $f_k$  é integrável em  $[0, +\infty[$  porque

$$\int_0^{+\infty} f_k = \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}} dx$$

é o integral de uma função contínua num intervalo compacto.

Como a função  $f$  é positiva, a sucessão de funções  $f_k$  é crescente (isto é,  $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$  para todo o  $x \in [0, +\infty[$ ).

Finalmente, temos

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}} dx &= -\frac{2}{5} \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{5}{2\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}} dx \\ &= -\frac{2}{5} e^{-5\sqrt{x}} \Big|_{\frac{1}{k}}^k \\ &= \frac{2}{5} \left( e^{-\frac{5}{\sqrt{k}}} - e^{-5\sqrt{k}} \right) \end{aligned}$$

Portanto a sucessão dos integrais  $\int_0^{+\infty} f_k$  é limitada, (converge para  $\frac{2}{5}$ ).

Como  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  para todo o  $x \in ]0, +\infty[$  quando  $k$  tende para  $\infty$ , o teorema da convergência monótona garante que  $f$  é integrável em  $]0, +\infty[$  e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5}$$

- b) A função  $f$  decresce para 0 como  $\frac{1}{x}$  quando  $x$  tende para infinito portanto não é integrável. Para justificar esta afirmação rigorosamente podemos notar que, como a função  $f$  é positiva, se o integral existir teremos para todo o número natural  $k$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx > \int_0^k \frac{1}{x+1} dx = \log(x+1)|_0^k = \log(k+1)$$

Como não existe nenhum número real que verifique estas condições para todo o  $k$  concluímos que o integral não existe.