Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Teste - 13 de Novembro de 99 - 15h00
Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{2} \leq x+y \leq 1 \, , \frac{1}{2} \leq x-y \leq 1\}$$

e seja $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

(3) a) Escreva uma expressão para $\int_S f$ em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int dy \right) dx$.

(3) b) Calcule o integral $\int_S f$ usando a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = (u+1)^2 + (v+1)^2 \\ y = (u+1)^2 - (v+1)^2 \end{cases}$$

definida no conjunto $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > -1 \, , v > -1\}$.

2. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt[4]{x^2+y^2} - 1 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$$

(3) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de um integral iterado da forma $\int \left(\int \left(\int dy \right) dx \right) dz$

(3) b) Calcule o volume de V da forma que preferir.

3. Considere o campo vectorial $F(x,y) = (xe^{x^2+y^2}, ye^{x^2+y^2})$ definido em $\mathbb{R}^2$.

(2) a) Mostre que o campo é fechado.

(3) b) Calcule o integral de linha de F ao longo de um caminho fechado simples que percorre a circunferência de raio 1 centrada na origem uma vez no sentido directo.

(3) 4. Seja $f : [0,1]^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\int_{[0,1]^n} f = A$$

Mostre que existe $x \in [0,1]^n$ tal que $f(x) = A$.