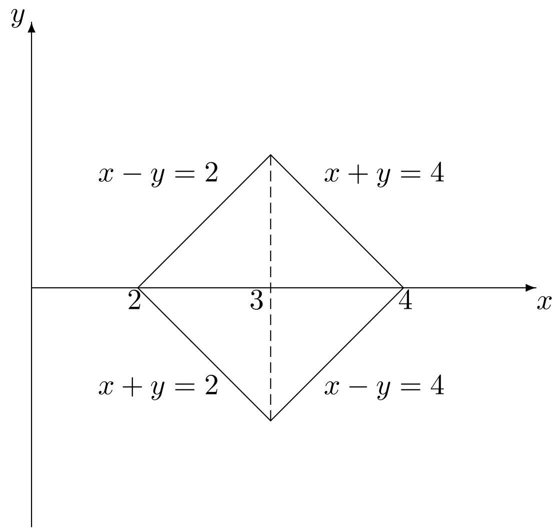
Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

Resolução do 1º Teste - 13 de Novembro de 99 - 13h00

1. a) A região S tem o seguinte aspecto:



Portanto uma expressão para o integral é dada por

$$\int_S f = \int_2^3 \int_{2-x}^{x-2} (x^2 - y^2)dydx + \int_3^4 \int_{x-4}^{4-x} (x^2 - y^2)dydx$$

b) O jacobiano da transformação

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{u+1} + \sqrt{v+1} \\ y &= \sqrt{u+1} - \sqrt{v+1} \end{aligned}$$

é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u+1}} & \frac{1}{2\sqrt{v+1}} \\ \frac{1}{2\sqrt{u+1}} & -\frac{1}{2\sqrt{v+1}} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{(u+1)(v+1)}} \end{aligned}$$

Nas novas variáveis $(u,v) \in]1,+\infty[\times]1,+\infty[$ o conjunto S é definido pelas condições

$$\begin{array}{lllll} x+y \geq 2 & \Leftrightarrow & \sqrt{u+1} \geq 1 & \Leftrightarrow & u \geq 0 \\ x+y \leq 4 & \Leftrightarrow & \sqrt{u+1} \leq 2 & \Leftrightarrow & u \leq 3 \\ x-y \geq 2 & \Leftrightarrow & \sqrt{v+1} \geq 1 & \Leftrightarrow & v \geq 0 \\ x-y \leq 4 & \Leftrightarrow & \sqrt{v+1} \leq 2 & \Leftrightarrow & v \leq 3 \end{array}$$

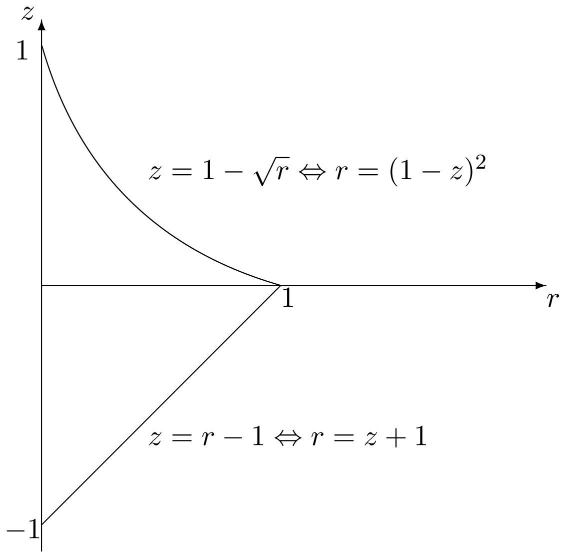
Finalmente, a função f escrita nas novas variáveis é

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 4\sqrt{(u+1)(v+1)}$$

Portanto, pelo teorema de mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}\int_S f &= \int_0^3\int_0^3 4\sqrt{(u+1)(v+1)}\frac{1}{2\sqrt{(u+1)(v+1)}}dudv\\ &= \int_0^3\int_0^3 2dudv\\ &= 18\end{aligned}$$

2. a) Fazendo $r=\sqrt{x^2+y^2}$, V é definido por $r-1\leq z\leq 1-\sqrt{r}$. Portanto V é a seguinte região plana rodada em torno do eixo Oz:



Para cada valor de z fixo, x e y variam num círculo com o raio indicado na figura acima. Assim, uma expressão para o volume é dada pelo integral iterado:

$$\int_{-1}^{0}\int_{-(1+z)}^{1+z}\int_{-\sqrt{(1+z)^2-x^2}}^{\sqrt{(1+z)^2-x^2}} 1\,dydxdz+$$

$$\int_{0}^{1}\int_{-(1-z)^2}^{(1-z)^2}\int_{-\sqrt{(1-z)^4-x^2}}^{\sqrt{(1-z)^4-x^2}} 1\,dydxdz$$

b) As coordenadas mais adequadas ao cálculo deste integral são coordenadas cilíndricas centradas no eixo Oz. Tendo em conta a figura acima obtemos a seguinte expressão para o volume:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(V) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r-1}^{1-\sqrt{r}} r\,dzdrd\theta\\ &= 2\pi\int_0^1 (1-\sqrt{r}-r+1)r\,dr\\ &= \frac{8\pi}{15}\end{aligned}$$

3. a)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Como as derivadas cruzadas são iguais, o campo é fechado.

b) Como $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ não é simplesmente conexo não podemos concluir da alínea anterior que o campo é gradiante. No entanto, podemos ver se existe um potencial $V(x,y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow V(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + C$$

Portanto o campo é gradiante, o que implica, que o integral ao longo de qualquer caminho fechado em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ é 0.

Alternativamente pode calcular-se o integral directamente: Uma parametrização para a curva é $g(t) = (\cos t, \mathrm{sen} t)$ com $0 \leq t \leq 2\pi$. Portanto o integral em questão é dado por

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos t}{1}, \frac{\mathrm{sen} t}{1}\right).(-\mathrm{sen} t, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0$$

4. Seja $\{s_k\}$ uma sucessão de funções em escada definidas em $]0,1[$ tais que

i) $s_k(x) \leq s_{k+1}(x)$ q.t.p. em $]0,1[$

ii) $s_k(x) \longrightarrow f^2(x)$ q.t.p. em $]0,1[$

iii) $\{\int_0^1 s_k\}$ é uma sucessão limitada

Sem perda de generalidade podemos assumir que $s_k(x) \geq 0$ para todo o $x \in]0,1[$ (Podemos sempre substituir $s_k(x)$ por $\max(s_k(x), 0)$. Esta sucessão satisfará óbviamente as duas primeiras condições e quanto à terceira: $\int_0^1 \max(s_k(x), 0) \leq \int_0^1 f^2$).

Defina-se $t_k(x) = \sqrt{s_k}(x)$. Então t_k é uma função em escada e

i) $t_k(x) \leq t_{k+1}(x)$ q.t.p. em $]0,1[$ já que a raíz quadrada é uma função crescente.

ii) $t_k(x) \longrightarrow f(x)$ q.t.p. em $]0,1[$ já que a raíz quadrada é uma função contínua.

iii) Seja $M \in \mathbb{R}$ tal que $\int_0^1 s_k \leq M$. Sejam $I_{k,j}$ os subintervalos de uma partição de $]0,1[$ onde s_k é constante e $s_{k,j}$ o valor assumido por s_k no interior de $I_{k,j}$.

Então

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t_k &= \sum_j \sqrt{s_{k,j}}\mathrm{Vol}(I_j) \\
&= \sum_{\{j:s_k,j>1\}} \sqrt{s_{k,j}}\mathrm{Vol}(I_j) + \sum_{\{j:s_k,j\leq 1\}} \sqrt{s_{k,j}}\mathrm{Vol}(I_j) \\
&\leq \sum_{\{j:s_k,j>1\}} s_{k,j}\mathrm{Vol}(I_j) + \sum_{\{j:s_k,j\leq 1\}} 1\mathrm{Vol}(I_j) \\
&\leq \int_0^1 s_k + 1 \\
&\leq M + 1
\end{aligned}$$

portanto $\{\int_0^1 t_k\}$ é uma sucessão limitada.

Concluímos que f é uma função limite superior, conforme pretendíamos demonstrar.