Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º Semestre 1999/2000

2º Teste e 1º Exame - Todos os cursos

26 de Junho de 2000

2º Teste - Grupos 4,5,6 e 7 - 90 minutos.
1º Exame - Todos os Grupos - 3 horas.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere a região $A \subset \mathbb{R}^2$ descrita por (2)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x^3| \leq y \leq |x|, -1/2 \leq x \leq 1\}.$$

Escreva uma expressão para a sua área em termos de um integral múltiplo da forma $\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots} dy)dx$.

2. Considere o sólido V descrito por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2},\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\}.$$

a) Escreva uma expressão para o seu volume em termos de um integral múltiplo da forma $\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots} dx)dy)dz$. (2)

b) Escreva uma expressão para o seu volume em termos de um integral múltiplo em coordenadas cilíndricas. (2)

c) Calcule o volume de V utilizando coordenadas esféricas. (2)

3. Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ a região definida por (2)

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq \pi - x,\ x/2 \geq y \geq x/2 - \pi/4\}.$$

Calcule $\int\int_S \operatorname{sen}(x + y)\cos(x - 2y)dxdy$, usando uma mudança de coordenadas apropriada.

4. Considere a variedade

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}},\ 0 < x^2+y^2 < 4\}.$$

a) Determine o espaço tangente a M no ponto $(1,1,\sqrt{8})$. (1)

b) Escreva uma expressão para a área de M. Não necessita de calcular o integral mas tem de o apresentar explicitamente como integral múltiplo. (2)

c) Considere o campo vectorial $f(x,y,z) = (-zy + (z^2-64), zx, x^3y^3)$. Calcule o fluxo de $\mathrm{rot} f$ através de M no sentido da normal que tem componente segundo z negativa. (2)

d) Será que f é um gradiante em $\mathbb{R}^3$? Justifique. (1)

5. Considere a pirâmide $P \subset \mathbb{R}^3$ limitada pelos três planos coordenados e pelo plano $x+y+z=1$. Considere o campo vectorial $h(x,y,z) = (3, (z^3+x^2)y, -x^2z - \frac{1}{4}z^4)$. (2)

Calcule o fluxo de h através da face de P que está contida no plano $x+y+z=1$, no sentido da normal exterior.

6. Determine o ponto da circunferência de raio 1 centrada na origem em $\mathbb{R}^2$ em que a função $f(x,y) = x - y$ tem o valor máximo. Justifique. (1)

7. Determine se a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}$ é integrável em $]0,+\infty[$. Em caso afirmativo calcule o seu integral. Justifique. (1)