

Análise Matemática III
1º Teste - 6 de Maio de 2000 - 15h00
Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0; z \geq 0; z \leq \frac{1}{2} + \frac{(x^2 + y^2)}{2}; z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

- (2) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.
- (2) b) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dz \right) dx \right) dy$.
- (3) c) Calcule a coordenada x do centro de massa de V , supondo que a densidade é constante igual a um e usando coordenadas cilíndricas.

2. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(x, y) = (y, y - x^3)$$

e o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < y < 2; x^3 < y < 1 + x^3\}$$

- (2.5) a) Mostre que g define uma transformação de coordenadas em S .
- (2.5) b) Use a transformação g para calcular o integral

$$\int \int_S \frac{x^2}{1 + (y - x^3)^2} dx dy$$

3. Considere o caminho em \mathbb{R}^3 definido por $g(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ onde $t \in [0, 4\pi]$.

- (1.5) a) Calcule a massa do fio de um material com densidade dada por $\alpha(x, y, z) = z$ e cuja configuração é dada pelo caminho g .
- (1.5) b) Calcule o momento de inércia do fio da alínea anterior relativamente ao eixo z .
- (2) c) Calcule o trabalho realizado pela força $F(x, y, z) = (-y, x, 0)$ ao longo do caminho g .

(3) 4. Determine, justificadamente, qual das funções seguintes é integrável no respectivo domínio:

- a) $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
- b) $g :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = e^{-x}$.