**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Análise Matemática III

1º Teste - 6 de Maio de 2000 - 13h00

Duração: 1h30m

**Apresente e justifique todos os cálculos**

1. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 2(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2, z \geq 1-\sqrt{(x^2+y^2)}, z \leq 2-2(x^2+y^2), x, y \geq 0\}.$$

(2) a) Escreva uma expressão para o volume de $V$ em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx\right) dy\right) dz$.

(2) b) Escreva uma expressão para o volume de $V$ em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dz\right) dy\right) dx$.

(3) c) Calcule o volume de $V$ utilizando coordenadas cilíndricas.

2. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y) = (\exp(x+y), \exp(x-y))$.

(2.5) a) Mostre que $g$ define uma transformação de coordenadas em

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \log(\pi/2) \leq (x+y) \leq \log(\pi)\,, \log(\pi/2) \leq (x-y) \leq \log(\pi)\}.$$

(2.5) b) Utilize a transformação $g$ para calcular o integral

$$\int\int_S e^{2x} \mathrm{sen}(e^{x+y}) \cos(e^{x-y}) dxdy.$$

3. Considere o caminho em $\mathbb{R}^3$ definido por $g(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), t)$, onde $t \in [0, 6\pi]$. Seja $C$ a curva representada por $g$.

(1.5) a) Calcule o comprimento do caminho $g$.

(1.5) b) Calcule a massa de $C$, sabendo que a densidade de massa por unidade de comprimento é dada por $\rho(x,y,z) = z^2$.

(2) c) Calcule o trabalho da força $f(x,y,z) = (x,y,z)$ ao longo de $C$, percorrida no sentido descendente dos $z$.

(3) 4. Determine, justificando, quais das seguintes funções são integráveis no seu domínio:

a) $f : [2, +\infty[ \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$.

b) $g : [0, 1[ \to \mathbb{R}$, onde $g(x) = \frac{1}{1-x}$.