Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

Resolução do 1º Teste - 11 de Novembro de 00 - 11h00

1. a) O conjunto tem simetria cilíndrica em relação ao eixo dos z. Seja $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, como é habitual nas coordenadas cilíndricas. Fazendo um corte vertical, por exemplo segundo o plano $x=0$, observamos que o sólido é obtido por rotação em torno do eixo dos z, para $x, y \geq 0$, da região que está simultâneamente no interior da circunferência de raio 2 centrada na origem do plano ρz e no exterior da circunferência de raio 2 centrada em $(2,0)$ no mesmo plano.
   Essas duas circunferências intersectam-se no ponto $(1, \sqrt{3})$ do plano ρz, para $z \geq 0$. Para um z fixo entre 0 e $\sqrt{3}$, o corte horizontal correspondente projectado no plano xy consiste portanto na região com $x, y \geq 0$ no interior da circunferência centrada na origem e de raio $2+\sqrt{4-z^2}$. A projecção correspondente no caso de um corte para $\sqrt{3} \leq z \leq 2$ é a região com $x, y \geq 0$ no interior da circunferência centradas na origem de raio $\sqrt{4-z^2}$. Temos assim,

$$Vol(V) = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{2+\sqrt{4-z^2}} \left(\int_0^{\sqrt{(2+\sqrt{4-z^2})^2-y^2}} dx \right) dy \right) dz +$$

$$+ \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(\int_0^{\sqrt{4-z^2}} \left(\int_0^{\sqrt{(4-z^2)-y^2}} dx \right) dy \right) dz.$$

   b) Utilizando coordenadas cilíndricas obtemos, pela alínea anterior,

$$M = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{4-(\rho-2)^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} \left(\int_0^{\pi/2} z\rho \, d\theta \right) dz \right) d\rho \; = \pi \int_0^1 (\rho - \rho^2) d\rho = \pi/6.$$

2. Consideremos a mudança de coordenadas dada por $(u,v) = g(x,y) = (x+y, x-2y)$. A transformação g é de classe C^1 pois é linear e é injectiva pois $(x,y) = g^{-1}(u,v) = ((2u+v)/3, (u-v)/3)$. Temos também $|\det Dg| = 3$. Em termos das coordenadas (u,v) a região U é descrita por

$$g(U) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 1, \, 1 < v < 2\}.$$

   Pelo teorema da mudança de coordenadas de integração temos então,

$$\int_U \cos(x+y) e^{2y-x} dxdy = \int_{g(U)} \cos(u) e^{-v} \frac{1}{3} dudv =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \cos(u) du \int_1^2 e^{-v} dv = \frac{1}{3} \mathrm{sen}(1)(e^{-1} - e^{-2}).$$

3. a) Facilmente se verifica que

$$\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1 = 4xy/(x^2+y^2-4)^2,$$

pelo que f é um campo vectorial fechado.

b) procuramos um campo escalar ϕ tal que $\nabla\phi = f$, ou seja $\partial_x\phi = f_1$ e $\partial_y\phi = f_2$. Integrando a primeira equação obtemos $\phi(x,y) = \log(x^2+y^2-4)+h(y)$. Substituindo na segunda equação obtemos $h = const.$, pelo que podemos tomar $\phi(x,y) = \log(x^2+y^2-4)$. Esta função é de classe C^1 na região $x^2+y^2 > 4$ pelo que f é um gradiante nesse conjunto.

c) O caminho g está contido na região $x^2+y^2 > 4$ e une os pontos $(0,4)$ e $(4,0)$. Pelo teorema fundamental do cálculo temos $\int f dg = \int \nabla\phi dg = \phi(4,0) - \phi(0,4) = \log(12) - \log(12) = 0$.

4. Seja $h(t)$, com $t \in [a,b]$, um caminho regular que parametriza a curva fechada C. Seja $(x,y) = G(u,v) = (f(u,v), g(u,v))$. A imagem $G(C)$ da curva C no plano xy será então parametrizada pelo caminho $G \circ h(t) = G(h(t)) = (f(h(t)), g(h(t)))$. Temos que $(G\circ h)'(t) = DG\, h'(t)$, onde DG é a matriz Jacobiana de G. Calculando o trabalho do campo vectorial $a(x,y) = (y,0)$ ao longo de $G \circ h(t)$ obtemos

$$W = \int a\, d(G\circ h) = \int_a^b (y(G\circ h(t)),0)\cdot(G\circ h)'(t)dt = \int_a^b (g(h(t)),0)\cdot(G\circ h)'(t)dt =$$

$$= \int_a^b g(h(t))((\partial_u f)h_1' + (\partial_v f)h_2')(t)dt = \int_a^b (g\partial_u f, g\partial_v f)\cdot h'(t)dt = \int (g\partial_u f, g\partial_v f)dh,$$

que é o trabalho do campo $(g\partial_u f, g\partial_v f)$ ao longo de C como indicado na sugestão.

Podemos agora aplicar o teorema de Green a ambos os lados desta equação obtendo

$$-\int\int_{G(R)} dxdy = \int\int_R (\partial_u g\partial_v f - \partial_v g\partial_u f)dudv = -\int\int_R \det(DG)dudv,$$

como pretendíamos demonstrar.