Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício-teste 6

Um filamento eléctrico C, com densidade de carga eléctrica $\sigma(x,y,z) = \sqrt{5-8(x+1)(y+1)}$, tem a configuração da intersecção das superfícies $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z\}$ e $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+2y+z = -1\}$. Calcule a carga eléctrica de C.

Resolução: A carga eléctrica do filamento é dada pelo integral de linha

$$q = \int_C \sigma.$$

Para calcular este integral de linha precisamos de determinar uma parametrização para a curva C. Comecemos por determinar a equação da projecção, C', de C no plano xOy:

$$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = -1-2y-2x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -1-2y-2x = x^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2+(y+1)^2 = 1.$$

Portanto a projecção C' é uma circunferência de raio 1 centrada no ponto $(-1,-1,0)$. Uma parametrização para C pode ser definida por

$$g(t) = (\cos(t)-1, \operatorname{sen}(t)-1, 3-2\cos(t)-2\operatorname{sen}(t)), \ \ t \in [0,2\pi].$$

Onde se usou o facto de que, quando t percorre o intervalo $[0,2\pi]$, $(\cos(t)-1, \operatorname{sen}(t)-1, 0)$ percorre a projecção C' e que o único ponto de C por cima de $(\cos(t)-1, \operatorname{sen}(t)-1, 0)$ tem coordenada z dada por

$$z = -1-2(\operatorname{sen}(t)-1)-2(\cos(t)-1) = 3-2\cos(t)-2\operatorname{sen}(t).$$

Temos

$$g'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 2\operatorname{sen}(t)-2\cos(t))$$

$$||g'(t)|| = \sqrt{\operatorname{sen}^2(t)+\cos^2(t)+(2\operatorname{sen}(t)-2\cos(t))^2} = \sqrt{5-8\operatorname{sen}(t)\cos(t)}$$

$$\sigma(g(t)) = \sqrt{5-8(x(g(t))+1)(y(g(t))+1)} = \sqrt{5-8\cos(t)\operatorname{sen}(t)},$$

logo

$$q = \int_0^{2\pi} \sigma(g(t))||g'(t)||dt = \int_0^{2\pi} (5-8\cos(t)\operatorname{sen}(t))dt =$$

$$[5t+2\cos(2t)]_0^{2\pi} = 10\pi.$$