Análise Matemática III
1º Semestre de 2000/2001

Exercício teste 4 (a entregar na aula prática da semana de 16/10 a 20/10)
Escreva uma expressão para o volume do sólido

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2} \text{ e } x^2+y^2 \ge \frac{1}{4}\right\}$$

usando integrais iterados da forma

$$\text{(i)} \quad \int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz;$$
$$\text{(ii)} \quad \int \left(\int \left(\int dz \right) dx \right) dy.$$

Solução: O sólido S é obtido do cone com base no círculo de raio 1 centrado na origem do plano xOy e vértice $(0,0,1)$ retirando-lhe os pontos que pertencem ao cilindro circular de raio $\frac{1}{2}$ e eixo $x = y = 0$. A intersecção das fronteiras do cone e do cilindro é a circunferência de raio $\frac{1}{2}$ centrada na origem do plano xOy e a curva dada por

$$z = 1 - \sqrt{x^2+y^2} \text{ e } x^2+y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \text{ e } x^2+y^2 = \frac{1}{4},$$

i.e., a circunferência de raio $\frac{1}{2}$ e centro $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$contida no plano $z = \frac{1}{2}$.
É fácil ver que todos os pontos de S têm valores de z no intervalo $\left[0,\frac{1}{2}\right]$; por exemplo, basta notar que os pontos de S satisfazem

$$0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2} \le 1 - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Assim, são estes os limites do integral em z quando o integral iterado é da forma (i).
A intersecção de S com um plano $z =$ constante é a coroa circular dada por

$$\frac{1}{2} \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1 - z.$$

Consequentemente, em cada uma destas intersecções y varia entre $-(1-z)$ e $(1-z)$.
Para cada valor de (y,z), x tem que satisfazer

$$\frac{1}{4} - y^2 \le x^2 \le (1-z)^2 - y^2.$$

Há agora duas situações a distinguir: se $|y| \ge \frac{1}{2}$, x simplesmente varia entre $-\sqrt{(1-z)^2 - y^2}$ e $\sqrt{(1-z)^2 - y^2}$; se $|y| \le \frac{1}{2}$, x satisfaz a condição adicional $|x| \ge \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}$. (Isto acontece porque se $|y| \ge \frac{1}{2}$ a recta obtida fixando (y,z) e fazendo variar x não intersecta o cilindro $x^2+y^2 \le \frac{1}{2}$, e portanto a sua intersecção com S é um único segmento; se $|y| \le \frac{1}{2}$ esta recta intersecta o cilindro e portanto intersecta S em dois segmentos).

Assim, o volume de S pode ser escrito como

$$\begin{aligned} vol\,(S) &= \int_{\mathbb{R}^3} \chi_S = \int_S 1 \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-(1-z)}^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{-\sqrt{(1-z)^2-y^2}}^{\sqrt{(1-z)^2-y^2}} 1 dx \right) dy \right) dz \\ &+ \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\sqrt{(1-z)^2-y^2}}^{-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} 1 dx + \int_{\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\sqrt{(1-z)^2-y^2}} 1 dx \right) dy \right) dz \\ &+ \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1-z} \left(\int_{-\sqrt{(1-z)^2-y^2}}^{\sqrt{(1-z)^2-y^2}} 1 dx \right) dy \right) dz, \end{aligned}$$

correspondendo à ordem de integração pedida em (i).
Para escrever o mesmo integral na ordem de integração (ii), notamos que a projecção de S no plano xOy é a coroa circular

$$\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

o que implica que $|y| \leq 1$. Para cada valor de y tem-se

$$\frac{1}{4} - y^2 \leq x^2 \leq 1 - y^2$$

e portanto se $|y| \geq \frac{1}{2}$ tem-se $|x| \leq \sqrt{1-y^2}$, e se $|y| \leq \frac{1}{2}$ tem-se $\sqrt{\frac{1}{4} - y^2} \leq |x| \leq \sqrt{1-y^2}$. Como para cada valor de (x, y) os valores de z são apenas restritos pela equação do cone, vemos que o volume de S pode ser escrito como

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} 1 dz \right) dx \right) dy \\ &+ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} \left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} 1 dz \right) dx + \int_{\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} 1 dz \right) dx \right) dy \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} 1 dz \right) dx \right) dy. \end{aligned}$$