Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Resolução do Exercício-teste 2

1. Indique justificadamente se os seguintes conjuntos têm ou não medida nula.

(a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 0\}$

Note-se que

$$x^2 - y^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x - y = 0 \text{ ou } x + y = 0.$$

Portanto S é a união dos planos $x = y$ e $x = -y$. Estes planos têm medida nula pois são, respectivamente, os gráficos das funções contínuas $y = f(x, z) = x$ e $y = g(x, z) = -x$, em $\mathbb{R}^2$. Conclui-se que S tem medida nula porque é a união de dois conjuntos de medida nula.

(b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(y - x) = 1\}$

O conjunto S tem medida nula: note-se que

$$\cos(x - y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto S é uma união numerável de rectas,

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} S_k,$$

onde $S_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y + 2k\pi\}$. Cada recta S_k é um conjunto com medida nula pois é o gráfico da função contínua $x = g_k(y) = y + 2k\pi$, em $\mathbb{R}$. Conclui-se que S tem medida nula pois é a união numerável de conjuntos com medida nula.

(c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y}{9}^2 + z^2 = 1\}$

O conjunto S é a união dos gráficos das funções contínuas $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{9}}$ e $z = g(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{9}}$ em $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$. Conclui-se que S tem medida nula porque é a união de dois conjuntos de medida nula.

(d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -y^2 - z^2 \leq x \leq y^2 + z^2\}$

O conjunto S não tem medida nula: note-se que se um conjunto tem medida nula então todos os seus subconjuntos têm medida nula. Assim, para provar que S não tem medida nula basta mostrar que contém um conjunto que não tem medida nula. Ora, S contém, por exemplo, o intervalo aberto (não vazio) $I =]0, 1[\times]1, 2[^2$. De facto,

$$(x, y, z) \in I \;\Rightarrow\; -y^2 - z^2 < -2 < x < 2 < y^2 + z^2.$$

Como os intervalos abertos (não vazios) de $\mathbb{R}^n$ não têm medida nula em $\mathbb{R}^n$, conclui-se que S não tem medida nula.