Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

(a entregar na semana de 18/12/2000)

Exercício Teste 13

Considere um filtro de ar cuja forma é aproximadamente a do conjunto

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4\},$$

imerso numa corrente de ar cujo campo de velocidades é dado pela fórmula

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2yze^{y^2}, 2xze^{x^2}, -2 + xy).$$

a) Mostre que a quantidade de ar no interior do filtro se mantém constante, supondo que a densidade do ar é constante igual a 1.

b) Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de ar que **sai** através da parede curva do filtro.

Solução:

a) Pelo teorema da divergência, o fluxo total de ar através das paredes do filtro é

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \int_D \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, o fluxo é zero. Portanto a quantidade de ar que entra no filtro é igual à que sai.

b) Seja C a parede curva de D. Note-se que $\mathbf{F}$ é um campo de divergência nula em $\mathbb{R}^3$. Como $\mathbb{R}^3$ é um conjunto em estrela, podemos concluir que $\mathbf{F}$ é um rotacional, ou seja, existe um campo $\mathbf{L}$ tal que $\nabla \times \mathbf{L} = \mathbf{F}$. Um campo $\mathbf{L}$ que satisfaça esta equação é um potencial vector para $\mathbf{F}$.

Para calcular o fluxo de $\mathbf{F}$ através de C, podemos começar por calcular um potencial vector $\mathbf{L}$ para $\mathbf{F}$ e depois aplicar o teorema de Stokes a $\mathbf{L}$. Calcular $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$ consiste em resolver o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial L_3}{\partial y} - \frac{\partial L_2}{\partial z} &= 2yze^{y^2} \\ \frac{\partial L_1}{\partial z} - \frac{\partial L_3}{\partial x} &= 2xze^{x^2} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} &= -2 + xy \end{cases}$$

A solução para este sistema não é única. Para encontrar uma solução particular, podemos procurar uma solução que satisfaça, por exemplo, $L_1 = 0$. Obtemos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L_3}{\partial y} - \frac{\partial L_2}{\partial z} &= 2yze^{y^2} \\ -\frac{\partial L_3}{\partial x} &= 2xze^{x^2} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} &= -2 + xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L_3}{\partial y} - \frac{\partial L_2}{\partial z} &= 2yze^{y^2} \\ L_3 &= -ze^{x^2} + f(y,z) \\ L_2 &= -2x + \frac{1}{2}x^2 y + g(y,z) \end{cases}$$

Mais uma vez, a solução não é única. Impondo $g = 0$ e substituindo na primeira equação, vem $f(y,z) = ze^{y^2}$, logo

$$\mathbf{L} = (0, -2x + \frac{1}{2}x^2 y, ze^{y^2} - ze^{x^2}).$$

Seja C a parede curva de D. Pelo teorema de Stokes,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \int_{\partial C} (-2x + \frac{1}{2}x^2y)dy + (ze^{y^2} - ze^{x^2})dz,$$

onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária que aponta para **fora** do filtro e consequentemente ∂C é percorrido no sentido **negativo** quando visto do ponto $(0,0,10000)^*$. Uma parametrização para

$$\partial C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R} : x^2+y^2=4, z=4\},$$

na direcção indicada é $g(t) = (2\cos(t), -2\,\mathrm{sen}(t), 4), t\in[0,2\pi]$. Assim,

$$\int_{\partial C} (-2x + \frac{1}{2}x^2y)dy + (ze^{y^2} - ze^{x^2})dz =$$

$$\int_0^{2\pi} (0, -4\cos(t) - \frac{8}{2}\cos^2(t)\,\mathrm{sen}(t), 2e^{4\,\mathrm{sen}^2(t)} - 2e^{4\cos^2(t)})\cdot(-2\,\mathrm{sen}(t), -2\cos(t), 0)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 8\cos^2(t) + 8\cos^3(t)\,\mathrm{sen}(t)dt = 8\pi,$$

portanto a quantidade de ar que sai através da parede curva do filtro é 8π.

*Apesar de ∂C não se ver bem deste ponto