Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício resolvido 14

a) Usando os teoremas de convergência, mostre que a função definida por

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)}$$

é integrável em $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$.

b) Usando a regra de Leibniz (derivação do integral paramétrico), calcule

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\, dx \ \ (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Solução:

a) Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, pelo teorema da convergência dominada, basta encontrar uma função g, integrável em B, tal que $|f(x,y)| \leq g(x,y)$.

Mas,

$$|f(x,y)| \leq \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Assim, seja

$$g(x,y) = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Para verificar que g é integrável em B vamos usar o teorema da convergência monótona. Para $k = 1, 2, 3, \ldots$, seja

$$g_k(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{1}{k} \\ g(x,y) & \text{se } \frac{1}{k} < \sqrt{x^2+y^2} < 1 \end{cases}$$

Sendo $g \geq 0$, da definição de g_k, obtemos imediatamente que $g_k \leq g_{k+1}$. Dado que g é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é claro que $\lim_{k\to\infty} g_k = g$.

Cada uma das funções g_k é integrável em B por ser contínua e limitada. Mudando para coordenadas polares (r,θ), o respectivo integral é dado por

$$\int\int_B g_k(x,y)dxdy = 2\int_0^{2\pi} \left(\int_{1/k}^1 dr \right) d\theta = 2\pi(1 - \frac{1}{k}) < 2\pi$$

ou seja, a sucessão de integrais $(\int_B g_k)$ é majorada.

Assim, o teorema da convergência monótona garante que g é integrável em B.

Podemos então concluir que f é também integrável em B.

b) Seja $f(x,\alpha,\beta) = \dfrac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}$ e

$$F(\alpha,\beta) = \int_0^\infty f(x,\alpha,\beta)\, dx.$$

É fácil de verificar que f satisfaz as condições de aplicação da regra de Leibniz. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\right) dx \\
&= -\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}\, dx \lim_{k \to \infty} - \int_0^k x e^{-\alpha x^2}\, dx \\
&= \lim_{k \to \infty} \left[\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2}\right]_0^k \\
&= -\frac{1}{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Donde $F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}\ln \alpha + C(\beta)$. Para calcular $C(\beta)$, fazemos $\alpha = \beta$. Obtemos $0 = -\frac{1}{2}\ln \alpha + C(\beta)$, logo $C(\beta) = \frac{1}{2}\ln \beta$. Assim,

$$F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}\ln \alpha + \frac{1}{2}\ln \beta = \frac{1}{2}\ln \frac{\beta}{\alpha}.$$