**Análise Matemática III**
**1º semestre de 2000/2001**

**Exercício resolvido 13**

O filtro de uma máquina de lavar a loiça cuja forma é aproximadamente a do conjunto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3\},$$

está imerso numa corrente de água cujo campo de velocidades é dado pela fórmula

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2yz\cos(y^2), 2xz\cos(x^2), 1).$$

a) Mostre que a quantidade de água no interior do filtro se mantém constante, supondo que a densidade da água é constante igual a 1.

b) Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de água que entra através da parede curva do filtro.

**Solução:**

a) Pelo teorema da divergência, o fluxo total de água através das paredes do filtro é

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \int_D \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, o fluxo é zero. Portanto a quantidade de água que **entra** no filtro é igual à que sai.

b) Seja $C$ a parede curva de $D$. Note-se que $\mathbf{F}$ é um campo de divergência nula em $\mathbb{R}^3$. Como $\mathbb{R}^3$ é um conjunto em estrela, podemos concluir que $\mathbf{F}$ é um rotacional, ou seja, existe um campo $\mathbf{L}$ tal que $\nabla \times \mathbf{L} = \mathbf{F}$. Um campo $\mathbf{L}$ que satisfaça esta equação é um potencial vector para $\mathbf{F}$.

Para calcular o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $C$, podemos começar por calcular um potencial vector $\mathbf{L}$ para $\mathbf{F}$ e depois aplicar o teorema de Stokes a $\mathbf{L}$. Calcular $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$ consiste em resolver o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial L_3}{\partial y} - \frac{\partial L_2}{\partial z} &= 2yz\cos(y^2) \\ \frac{\partial L_1}{\partial z} - \frac{\partial L_3}{\partial x} &= 2xz\cos(x^2) \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} &= 1 \end{cases}$$

A solução para este sistema não é única. Para encontrar uma solução particular, podemos procurar uma solução que satisfaça, por exemplo, $L_1 = 0$. Obtemos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L_3}{\partial y} - \frac{\partial L_2}{\partial z} &= 2yz\cos(y^2) \\ -\frac{\partial L_3}{\partial x} &= 2xz\cos(x^2) \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L_3}{\partial y} - \frac{\partial L_2}{\partial z} &= 2yz\cos(y^2) \\ L_3 &= -z\,\mathrm{sen}(x^2) + f(y, z) \\ L_2 &= x + g(y, z) \end{cases}$$

Mais uma vez, a solução não é única. Impondo $g = 0$ e substituindo na primeira equação, vem $f(y, z) = z\,\mathrm{sen}(y^2)$, logo

$$\mathbf{L} = (0, x, z\,\mathrm{sen}(y^2) - z\,\mathrm{sen}(x^2)).$$

Pelo teorema de Stokes,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \int_{\partial C} \mathbf{L} \cdot d\alpha,$$

onde **n** é a normal unitária que aponta para **dentro** do filtro e consequentemente $\alpha$ percorre $\partial C$ no sentido **positivo** quando visto do ponto $(0,0,10000)^*$. Temos

$$\partial C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 9, z = 3\},$$

pelo que $\alpha(t) = (3\cos(t), 3\,\mathrm{sen}(t), 3), t \in [0, 2\pi]$, percorre $\partial C$ na direcção indicada. Assim,

$$\int_{\partial C} \mathbf{L} \cdot d\alpha$$

$$= \int_0^{2\pi} (0, 3\cos(t), 3\,\mathrm{sen}(9\,\mathrm{sen}^2(t)) - 3\,\mathrm{sen}(9\cos^2(t))) \cdot (-3\,\mathrm{sen}(t), 3\cos(t), 0) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 9\cos^2(t) dt = 9\pi,$$

portanto a quantidade de água que entra através da parede curva do filtro é $9\pi$.

$^*$Apesar de $\partial C$ não se ver bem deste ponto