1. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$u(x,y) = ax^2 + by(1-y),$$

em que a e b são constantes reais.

[1,0 val] (a) Determine para que valores de a e b a função u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

Resolução

A função u é de classe C^2 e é harmónica se e só se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Assim temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2a, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2b$$

e portanto u é harmónica se e só se

$$2a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

[1,0 val] (b) Para $a = b = -3$, determine a função inteira $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que verifica $\operatorname{Re} f = u$ e $f(0) = 3i$.

Resolução

Se u e v são funções de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, então para que $f = u + iv$ seja inteira é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-3x^2 - 3y(1-y)\right) = -6x \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-3x^2 - 3y(1-y)\right) = 3 - 6y \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} v(x,y) = -6xy + C(x) \\ -6y + C'(x) = 3 - 6y \end{cases}$$

Da segunda equação conclui-se que $C'(x) = 3$ pelo que $C(x) = 3x + C_0$ onde C_0 é uma constante real. Como $f(0) = 3i$, tem-se $v(0,0) = 3 \Leftrightarrow C_0 = 3$ e, portanto,

$$f(x+iy) = 3(-x^2 - y(1-y) + i(-2xy + x + 1)).$$

[1,0 val] (c) Calcule o integral:

$$\oint_{|z|=2017} \frac{f(z)}{(z-i)^2}\,dz,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido inverso.

Resolução

Sendo f inteira e $|i| < 2017$, a fórmula integral de Cauchy garante que

$$\oint_{|z|=2017} \frac{f(z)}{(z-i)^2}\,dz = -2\pi i f'(i).$$

Como

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -6x + i(-6y+3),$$

resulta

$$f'(i) = -3i,$$

e concluimos que o valor do integral é -6π.

[1,0 val] 2. (a) Utilize o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular

$$\int_\gamma \frac{1}{z-1}\,dz,$$

onde γ é uma parametrização do segmento de recta com ponto inicial $z_0 = i$ e ponto final $z_1 = 2$. Justifique cuidadosamente a sua resposta.

Resolução

A função é holomorfa na região simplesmente conexa $\mathbb{C}\backslash\{x \leq 1\}$, logo primitivável nessa região, pelo Teorema de Cauchy. Uma primitiva será $\log(z-1)$ para o argumento principal do logaritmo, cujo domínio de holomorfia é precisamente $\mathbb{C}\backslash\{x \leq 1\}$. Como o caminho de integração está contido em U, pelo TFC, o integral será $\log(1) - \log(i-1) = 0 - \log(\sqrt{2}) - i\frac{3\pi}{4}$.

[0,5 val] (b) Justifique que

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{z-1}\,dz = 2\pi i,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido direto.

Resolução

Imediato por aplicação da primeira fórmula integral de Cauchy à função $g(z) \equiv 1$.

[0,5 val] (c) A função $f(z) = \frac{1}{z-1}$ é primitivável num aberto U que contenha a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 2\}$?

Resolução

Não. Se fosse, pelo TFC, o valor do integral da alínea anterior seria zero.

3. Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z - 2}.$$

[1,0 val] (a) Determine e classifique as singularidades de f.

Resolução

As singularidades são dadas

$$z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = -2,$$

e tratam-se de pólos simples: por exemplo,

$$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z^2+z-2} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{2z+1} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

[1,0 val] (b) Determine os desenvolvimentos de f em série de Laurent em torno de $z = 1$, indicando os domínios onde estes desenvolvimentos são válidos.

Resolução

Para $0 < |z-1| < 3$ temos

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{(z-1)} \frac{1}{(z-1+3)} = \frac{1}{(z-1)} \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 + \frac{z-1}{3}\right)} = \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{(z-1)} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{n-1}}{3^{n+1}} \\
&= \sum_{k=-1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(z-1)^k}{3^{k+2}}.
\end{aligned}$$

Para $|z-1|>3$ temos

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)}\frac{1}{(z-1+3)}=\frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{(1+\frac{3}{z-1})}=$$
$$=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-3)^n}{(z-1)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-3)^n}{(z-1)^{n+2}}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-3)^{k-2}}{(z-1)^k}.$$

[2,0 val] 4. Utilzando o Teorema dos Resíduos, calcule

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\,dx\ .$$

RESOLUÇÃO

Considere a função $f(z)=e^{iz}/(z^2+4)^2$ que tem dois polos duplos nos pontos $\pm i2$. Para $R>2$ o Teorema dos Resíduos diz que

$$2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i2} f(z)=\int_{\gamma_R} f(z)\,dz, \tag{1}$$

onde γ_R é o segmento de reta com ponto inicial $-R$ e ponto final R e a semicircunferência com ponto inicial R e ponto final $-R$ e parte imaginária positiva. O integral no segmento real é

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx=\int_{-R}^{R}\frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\,dx+i\int_{-R}^{R}\frac{\operatorname{sen} x}{(x^2+4)^2}\,dx. \tag{2}$$

Como $\cos x/(x^2+4)^2$ é uma função par e $\operatorname{sen} x/(x^2+4)^2$ é uma função ímpar obtém-se que o integral em (2) é

$$2\int_0^R \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\,dx. \tag{3}$$

Na semicircunferência $\sigma(\theta)=Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$ e $R>2$, tem-se

$$\left|\int_\sigma f(z)\,dz\right|\le\int_0^\pi\frac{e^{-R\operatorname{sen}\theta}}{(R^2-4)^2}R\,d\theta<\pi\frac{R}{(R^2-4)^2}.$$

Segue-se que $\int_\sigma f(z)\,dz \to 0$ quando $R \to \infty$, e portanto

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\,dx \\ &= i\pi\left[\operatorname*{Res}_{z=i2}\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}\right] = i\pi\left[\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{(z+i2)^2}\bigg|_{z=i2}\right] \\ &= \frac{3}{32}\cdot\frac{\pi}{e^2}.\end{aligned}$$

[1,0 val] 5. Seja f uma função holomorfa na região $0 < |z - z_0| < R$, para algum $R > 0$. Mostre que se f é limitada nessa região (ou seja, se existe um $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todos os pontos z nessa região) então z_0 é uma singularidade removível de f.

Resolução

Pelo Teorema de Laurent, a função f admite um desenvolvimento em série de forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad \text{para} \quad 0 < |z-z_0| < R, \tag{4}$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz,$$

para qualquer que seja $0 < \epsilon < R$. Sendo M o máximo de $|f(z)|$ na região $0 < |z - z_0| < R$, obtemos

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\epsilon^{n+1}}2\pi\epsilon = M\epsilon^{-n}.$$

Para $n < 0$ tem-se $\lim_{\epsilon\to 0} M\epsilon^{-n} = 0$, concluímos que $a_n = 0$, para cada $n < 0$. Logo a parte principal da série (4) é nula, e portanto a singularidade no ponto z_0 é removível.

---

1. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$

$$v(x,y) = ay^2 + b(1 - x + x^2),$$

em que a e b são constantes reais.

[1,0 val] (a) Determine para que valores de a e b a função v é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

[1,0 val] (b) Para $a = -b = 5$, determine a função inteira $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que verifica $\operatorname{Im} f = v$ e $f(0) = -5i$.

[1,0 val] (c) Calcule o integral:

$$\oint_{|z|=2017} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido inverso.

[1,0 val] 2. (a) Utilize o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular

$$\int_\gamma \frac{1}{z+1}\, dz,$$

onde γ é uma parametrização do segmento de recta com ponto inicial $z_0 = 0$ e ponto final $z_1 = -1 + i$. Justifique cuidadosamente a sua resposta.

[0,5 val] (b) Justifique que

$$\oint_{|z+1|=2} \frac{1}{z+1}\, dz = 2\pi i,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido direto.

[0,5 val] (c) A função $f(z) = \frac{1}{z+1}$ é primitivável num aberto U que contenha a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 2\}$?

3. Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2}\ .$$

[1,0 val] (a) Determine e classifique as singularidades de f.

[1,0 val] (b) Determine os desenvolvimentos de f em série de Laurent em torno de $z = 2$, indicando os domínios onde estes desenvolvimentos são válidos.

[2,0 val] 4. Utilzando o Teorema dos Resíduos, calcule

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx\ .$$

Resolução

Considere a função $f(z) = ze^{iz}/(z^2+1)(z^2+4)$ que tem quatro polos simples nos pontos $\pm i2$ e $\pm i$. Para $R > 2$ o Teorema dos Resíduos diz que

$$2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=i2} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)\right] = \int_{\gamma_R} f(z)\, dz, \tag{5}$$

onde γ_R é o segmento de reta com ponto inicial $-R$ e ponto final R e a semicircunferência com ponto inicial R e ponto final $-R$ e parte imaginária positiva. O integral no segmento real é

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx = \int_{-R}^{R} \frac{x\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx + i\int_{-R}^{R} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx. \tag{6}$$

Como $x \operatorname{sen} x/(x^2+1)(x^2+4)$ é uma função par e $x\cos x/(x^2+1)(x^2+4)$ é uma função ímpar obtém-se que o integral em (6) é

$$2i\int_0^R \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx. \tag{7}$$

Na semicircunferência $\sigma(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $R > 2$, tem-se

$$\left|\int_\sigma f(z)\, dz\right| \leq \int_0^\pi \frac{Re^{-R\operatorname{sen}\theta}}{(R^2-1)(R^2-4)} R\, d\theta < \pi \frac{R^2}{(R^2-1)(R^2-4)}.$$

Segue-se que $\int_\sigma f(z)\, dz \to 0$ quando $R \to \infty$, e portanto

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx \\
&= \pi \left[\operatorname*{Res}_{z=i2} \frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)} + \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right] \\
&= \pi \left[\frac{i2e^{-2}}{-i12} + \frac{ie^{-1}}{i6}\right] \\
&= \frac{e-1}{e^2} \cdot \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

[1,0 val] 5. Seja f uma função holomorfa na região $0 < |z - z_0| < R$, para algum $R > 0$. Mostre que se f é limitada nessa região (ou seja, se existe um $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todos os pontos z nessa região) então z_0 é uma singularidade

removível de f.

RESOLUÇÃO

Pelo Teorema de Laurent, a função f admite um desenvolvimento em série de forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{para} \quad 0 < |z - z_0| < R, \tag{8}$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz,$$

para qualquer que seja $0 < \epsilon < R$. Sendo M o máximo de $|f(z)|$ na região $0 < |z - z_0| < R$, obtemos

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\epsilon^{n+1}} 2\pi\epsilon = M\epsilon^{-n}.$$

Para $n < 0$ tem-se $\lim_{\epsilon \to 0} M\epsilon^{-n} = 0$, concluímos que $a_n = 0$, para cada $n < 0$. Logo a parte principal da série (8) é nula, e portanto a singularidade no ponto z_0 é removível.

1. Sejam α e β duas constantes reais e u uma função dada em $\mathbb{R}^2$ por

$$u(x,y) = \alpha y^3 - \beta x^2 y\,.$$

[1,0 val] (a) Identifique o conjunto de valores de α e β para os quais u é uma função harmónica.

Resolução

A função u é harmónica sse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Assim temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\beta y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6\alpha y$$

e portanto u é harmónica sse, para todo real y,

$$(-2\beta + 6\alpha)y = 0,$$

o que é equivalente a $\beta = 3\alpha$.

[1,0 val] (b) Considere $\alpha = 1$ e $\beta = 3$. Determine uma função inteira f tal que

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) \quad \text{e} \quad f(i) = 1.$$

Resolução

Se u e v são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, então para que $f = u + iv$ seja inteira é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^3 - 3x^2 y\right) = -6xy \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(y^3 - 3x^2 y\right) = -3y^2 + 3x^2, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} v(x,y) = -3xy^2 + C(x) \\ -3y^2 + C'(x) = -3y^2 + 3x^2\,. \end{cases}$$

Da segunda equação conclui-se que $C'(x) = 3x^2$ pelo que $C(x) = x^3 + C_0$ onde C_0 é uma constante real. Logo, $v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C_0$. Como $f(i) = 1$, tem-se $v(0,1) = 0 \Leftrightarrow C_0 = 0$ e, portanto,

$$f(x+iy) = y^3 - 3x^2 y + i(-3xy^2 + x^3).$$

[1,0 val] (c) Indique, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z|=3} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido horário.

Resolução

Sendo f inteira e $1 < 3$, a fórmula integral de Cauchy garante que

$$\oint_{|z|=3} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz = -2\pi i f'(1)\,.$$

Como

$$f'(x+iy) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - i(3y^2 - 3x^2),$$

e, logo, $f'(1) = 3i$. O valor do integral será então 6π.

[1,0 val] 2. (a) Determine o domínio de holomorfia da função $f(z) = \log(z^2 - 1)$, onde se considera o argumento principal do logaritmo.

Resolução

O domínio de holomorfia será

$$\mathbb{C}\backslash\{x+iy : (x^2 - y^2 - 1) \leq 0 \ \wedge \ 2xy = 0\} =$$
$$\mathbb{C}\backslash\left(\{z = 0 + iy, y \in \mathbb{R}\} \cup \{z = x + i0,\ x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}\right).$$

[1,0 val] (b) Atendendo à alínea anterior, indique, justificando o valor de:

$$\oint_{|z-2|=\frac{1}{2}} \log(z^2-1)\,dz, \quad \text{e} \quad \oint_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{\log(z^2-1)}{(z-2)^2}\,dz,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido direto.

Resolução

O primeiro integral é zero, pelo TFC, uma vez que o caminho de integração está contido numa região simplesmente conexa onde a função é holomorfa. O segundo integral é dado por $2\pi i \frac{d}{dz} \log(z^2 - 1)\Big|_{z=2} = \frac{8\pi i}{3}$.

3. Considere a função

$$f(z) = \frac{\mathrm{sen}(z)}{z^4}.$$

[1,0 val] (a) Determine e classifique as singularidades de f.

Resolução

A função f possui uma única singularidade em $z = 0$. Trata-se de um pólo de terceira ordem, já que

$$\lim_{z\to 0} z^3 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{sen}(z)}{z} = 1 \neq 0.$$

[1,0 val] (b) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent em torno de $z = 0$, indicando o domínio onde este desenvolvimento é válido.

Resolução

Para $|z| > 0$ temos

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-3} = \sum_{k=-2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+5)!} z^{2k+1}.$$

[2,0 val] 4. Utilzando o Teorema dos Resíduos, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta\ .$$

Resolução

Para $z = e^{i\theta}$, com $0 \le \theta \le 2\pi$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta}\, d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{(z+z^{-1})/2}{iz(5-2(z+z^{-1}))}\, dz = \oint_{|z|=1} \frac{-(z^2+1)}{2iz(2z^2-5z+2)}\, dz \\
&= 2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{-(z^2+1)}{2iz(2z^2-5z+2)} + \operatorname*{Res}_{z=1/2} \frac{-(z^2+1)}{2iz(2z^2-5z+2)} \right] \\
&= 2\pi i \left[-\frac{1}{i4} + \frac{5}{i12} \right] \\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

[1,0 val] 5. Seja $f(z)$ uma função holomorfa em todo o plano complexo e suponha que existem $M \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $|f(z)| \leq M(1+|z|^n)$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Mostre que $f(z)$ é um polinómio de grau menor ou igual a n.

RESOLUÇÃO

Vamos mostrar que $f^{(n+1)}(z)$ é a função nula. Pela fórmula de Cauchy tem-se

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \oint_{|w|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}\, dw \tag{9}$$

se $|z| < R$, e portanto

$$|f^{(n+1)}(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(1+R^n)}{(R-|z|)^{n+2}} 2\pi R = M\frac{R(1+R^n)}{(R-|z|)^{n+2}}.$$

Como $\lim_{R\to\infty} M\frac{R(1+R^n)}{(R-|z|)^{n+2}} = 0$, segue-se que $f^{(n+1)}(z)$ é a função nula.

1. Sejam α e β duas constantes reais e v uma função dada em $\mathbb{R}^2$ por

$$v(x,y) = \alpha x y^2 - \beta x^3\,.$$

[1,0 val] (a) Identifique o conjunto de valores de α e β para os quais v é uma função harmónica.

[1,0 val] (b) Considere $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Determine uma função inteira f tal que

$$v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy) \quad \text{e} \quad f(i) = -1.$$

[1,0 val] (c) Indique, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z|=3} \frac{f(z))}{(z-i)^2}\,dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido anti-horário.

[1,0 val] 2. (a) Determine o domínio de holomorfia da função $f(z) = \log(z^2+1)$, onde se considera o argumento principal do logaritmo.

[1,0 val] (b) Atendendo à alínea anterior, indique, justificando o valor de:

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \log(z^2+1)\,dz, \quad \text{e} \quad \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\log(z^2+1)}{z^2}\,dz.$$

3. Considere a função

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^4}.$$

[1,0 val] (a) Determine e classifique as singularidades de f.

[1,0 val] (b) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent em torno de $z = 0$, indicando o domínio onde este desenvolvimento é válido.

[2,0 val] 4. Utilzando o Teorema dos Resíduos, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+4\cos\theta)^2}\,d\theta\,.$$

Resolução

Para $z = e^{i\theta}$, com $0 \le \theta \le 2\pi$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+4\cos\theta)^2}\, d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{iz(5+2(z+z^{-1}))^2}\, dz \\
&= \oint_{|z|=1} \frac{z}{i4(z+2)^2(z+1/2)^2}\, dz \\
&= 2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=-1/2} \frac{z}{i4(z+2)^2(z+1/2)^2} \right] \\
&= \frac{\pi}{2} \left[\frac{d}{dz} \frac{z}{(z+2)^2} \bigg|_{z=-1/2} \right] \\
&= \frac{10}{27}\pi.
\end{aligned}$$

[1,0 val] 5. Seja $f(z)$ uma função holomorfa em todo o plano complexo e suponha que existem $M \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $|f(z)| \le M(1+|z|^n)$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Mostre que $f(z)$ é um polinómio de grau menor ou igual a n.

Resolução

Vamos mostrar que $f^{(n+1)}(z)$ é a função nula. Pela fórmula de Cauchy tem-se

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \oint_{|w|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}\, dw \tag{10}$$

se $|z| < R$, e portanto

$$|f^{(n+1)}(z)| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M(1+R^n)}{(R-|z|)^{n+2}} 2\pi R = M \frac{R(1+R^n)}{(R-|z|)^{n+2}}.$$

Como $\lim_{R\to\infty} M\frac{R(1+R^n)}{(R-|z|)^{n+2}} = 0$, segue-se que $f^{(n+1)}(z)$ é a função nula.