DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2016/2017

Teste 1, versão A

MEFT, MEC, MEBiom, LEGM,
LMAC, MEAer, MEMec, LEAN, LEMat

22 de abril de 2017, às 9:00

INSTRUÇÕES

- **Duração do teste: 1h 30m.**
- **Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular e telemóveis.**
- **Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.**
- **Numere todas as páginas do seu caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões estão respondidas.**

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1		3,0	
2		2,0	
3		2,0	
4		2,0	
5		1,0	
Total		10,0	

Nome: ____

Nº :__________________________ **Sala:**____________

Curso: _______________________ **Rubrica (DOCENTE):**

Análise Complexa e Equações Diferenciais — 2º Semestre 2016/2017
22 de abril de 2017, às 9:00 — Teste 1 versão A

MEFT, MEC, MEBiom, LEGM,
LMAC, MEAer, MEMec, LEAN, LEMat

1. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$u(x,y) = ax^2 + by(1-y),$$

em que a e b são constantes reais.

[1,0 val] (a) Determine para que valores de a e b a função u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

[1,0 val] (b) Para $a = b = -3$, determine a função inteira $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que verifica $\operatorname{Re} f = u$ e $f(0) = 3i$.

[1,0 val] (c) Calcule o integral:

$$\oint_{|z|=2017} \frac{f(z)}{(z-i)^2}\, dz,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido inverso.

[1,0 val] 2. (a) Utilize o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular

$$\int_\gamma \frac{1}{z-1}\, dz,$$

onde γ é uma parametrização do segmento de recta com ponto inicial $z_0 = i$ e ponto final $z_1 = 2$. Justifique cuidadosamente a sua resposta.

[0,5 val] (b) Justifique que

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{z-1}\, dz = 2\pi i,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido direto.

[0,5 val] (c) A função $f(z) = \frac{1}{z-1}$ é primitivável num aberto U que contenha a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 2\}$?

3. Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{z^2+z-2}\,.$$

[1,0 val] (a) Determine e classifique as singularidades de f.

[1,0 val] (b) Determine os desenvolvimentos de f em série de Laurent em torno de $z = 1$, indicando os domínios onde estes desenvolvimentos são válidos.

[2,0 val] 4. Utilzando o Teorema dos Resíduos, calcule

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\, dx\,.$$

[1,0 val] 5. Seja f uma função holomorfa na região $0 < |z-z_0| < R$, para algum $R > 0$. Mostre que se f é limitada nessa região (ou seja, se existe um $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todos os pontos z nessa região) então z_0 é uma singularidade removível de f.

Análise Complexa e Equações Diferenciais
2^{o} Semestre 2016/2017

Teste 1, versão B
MEFT, MEC, MEBiom, LEGM,
LMAC, MEAer, MEMec, LEAN, LEMat
22 de abril de 2017, às 9:00

INSTRUÇÕES

- **Duração do teste: 1h 30m.**
- **Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular e telemóveis.**
- **Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.**
- **Numere todas as páginas do seu caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões estão respondidas.**

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1		3,0	
2		2,0	
3		2,0	
4		2,0	
5		1,0	
Total		10,0	

Nome: ______________________________

Nº :______________________ **Sala:**__________

Curso: ____________________ **Rubrica (DOCENTE):**

1. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$

$$v(x, y) = ay^2 + b(1 - x + x^2),$$

em que a e b são constantes reais.

[1,0 val] (a) Determine para que valores de a e b a função v é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

[1,0 val] (b) Para $a = -b = 5$, determine a função inteira $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que verifica $\operatorname{Im} f = v$ e $f(0) = -5i$.

[1,0 val] (c) Calcule o integral:

$$\oint_{|z|=2017} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido inverso.

[1,0 val] 2. (a) Utilize o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular

$$\int_\gamma \frac{1}{z+1}\, dz,$$

onde γ é uma parametrização do segmento de recta com ponto inicial $z_0 = 0$ e ponto final $z_1 = -1 + i$. Justifique cuidadosamente a sua resposta.

[0,5 val] (b) Justifique que

$$\oint_{|z+1|=2} \frac{1}{z+1}\, dz = 2\pi i,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido direto.

[0,5 val] (c) A função $f(z) = \frac{1}{z+1}$ é primitivável num aberto U que contenha a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 2\}$?

3. Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2}\, .$$

[1,0 val] (a) Determine e classifique as singularidades de f.

[1,0 val] (b) Determine os desenvolvimentos de f em série de Laurent em torno de $z = 2$, indicando os domínios onde estes desenvolvimentos são válidos.

[2,0 val] 4. Utilzando o Teorema dos Resíduos, calcule

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx\, .$$

[1,0 val] 5. Seja f uma função holomorfa na região $0 < |z - z_0| < R$, para algum $R > 0$. Mostre que se f é limitada nessa região (ou seja, se existe um $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todos os pontos z nessa região) então z_0 é uma singularidade removível de f.

Análise Complexa e Equações Diferenciais
2º Semestre 2016/2017

Teste 1, versão C
MEAmbi, MEBiol, MEEC, MEQ, LEIC
22 de abril de 2017, às 11:30

INSTRUÇÕES

- **Duração do teste: 1h 30m.**
- **Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular e telemóveis.**
- **Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.**
- **Numere todas as páginas do seu caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões estão respondidas.**

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1		3,0	
2		2,0	
3		2,0	
4		2,0	
5		1,0	
Total		10,0	

Nome: ____

Nº :_________________________ **Sala:**___________

Curso: ______________________ **Rubrica (DOCENTE):**

1. Sejam α e β duas constantes reais e u uma função dada em $\mathbb{R}^2$ por

$$u(x,y) = \alpha y^3 - \beta x^2 y\,.$$

[1,0 val] (a) Identifique o conjunto de valores de α e β para os quais u é uma função harmónica.

[1,0 val] (b) Considere $\alpha = 1$ e $\beta = 3$. Determine uma função inteira f tal que

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) \quad \text{e} \quad f(i) = 1.$$

[1,0 val] (c) Indique, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z|=3} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido horário.

[1,0 val] 2. (a) Determine o domínio de holomorfia da função $f(z) = \log(z^2-1)$, onde se considera o argumento principal do logaritmo.

[1,0 val] (b) Atendendo à alínea anterior, indique, justificando o valor de:

$$\oint_{|z-2|=\frac{1}{2}} \log(z^2-1)\,dz, \quad \text{e} \quad \oint_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{\log(z^2-1)}{(z-2)^2}\,dz,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido direto.

3. Considere a função

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^4}.$$

[1,0 val] (a) Determine e classifique as singularidades de f.

[1,0 val] (b) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent em torno de $z=0$, indicando o domínio onde este desenvolvimento é válido.

[2,0 val] 4. Utilzando o Teorema dos Resíduos, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta\,.$$

[1,0 val] 5. Seja $f(z)$ uma função holomorfa em todo o plano complexo e suponha que existem $M \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $|f(z)| \leq M(1+|z|^n)$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Mostre que $f(z)$ é um polinómio de grau menor ou igual a n.

DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais
2º Semestre 2016/2017

Teste 1, versão D
MEAmbi, MEBiol, MEEC, MEQ, LEIC
22 de abril de 2017, às 11:30

INSTRUÇÕES

- **Duração do teste: 1h 30m.**
- **Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular e telemóveis.**
- **Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.**
- **Numere todas as páginas do seu caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões estão respondidas.**

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1		3,0	
2		2,0	
3		2,0	
4		2,0	
5		1,0	
Total		10,0	

Nome: ____

Nº :_________________________ **Sala:**___________

Curso: ______________________ **Rubrica (DOCENTE):**

Análise Complexa e Equações Diferenciais 2º Semestre 2016/2017
22 de abril de 2017, às 11:30 Teste 1 versão D

MEAmbi, MEBiol, MEEC, MEQ, LEIC

1. Sejam α e β duas constantes reais e v uma função dada em $\mathbb{R}^2$ por

$$v(x,y) = \alpha x y^2 - \beta x^3 .$$

[1,0 val] (a) Identifique o conjunto de valores de α e β para os quais v é uma função harmónica.

[1,0 val] (b) Considere $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Determine uma função inteira f tal que

$$v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy) \quad \text{e} \quad f(i) = -1.$$

[1,0 val] (c) Indique, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z|=3} \frac{f(z)}{(z-i)^2}\, dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido anti-horário.

[1,0 val] 2. (a) Determine o domínio de holomorfia da função $f(z) = \log(z^2+1)$, onde se considera o argumento principal do logaritmo.

[1,0 val] (b) Atendendo à alínea anterior, indique, justificando o valor de:

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \log(z^2+1)\, dz, \quad \text{e} \quad \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\log(z^2+1)}{z^2}\, dz.$$

3. Considere a função

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^4}.$$

[1,0 val] (a) Determine e classifique as singularidades de f.

[1,0 val] (b) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent em torno de $z = 0$, indicando o domínio onde este desenvolvimento é válido.

[2,0 val] 4. Utilzando o Teorema dos Resíduos, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+4\cos\theta)^2}\, d\theta \ .$$

[1,0 val] 5. Seja $f(z)$ uma função holomorfa em todo o plano complexo e suponha que existem $M \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $|f(z)| \le M(1+|z|^n)$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Mostre que $f(z)$ é um polinómio de grau menor ou igual a n.