DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

1º Teste / Exame (1ª parte) versão A
3 de julho de 2017, às 18:30
MEFT, MEC, MEBiom, LEGM, LMAC

1. Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x, y) = \operatorname{sen}(x)e^{-y}$$

[1,0 val] (a) Mostre que u é a parte real de uma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

[1,0 val] (b) Sabendo que $f(0) = 0$, determine f.

2. Considere a função

$$g(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}.$$

[1,0 val] (a) Determine a série de Taylor de g em torno de $z = 0$ e indique a sua região de convergência.

[1,0 val] (b) Determine a série de Laurent de g em torno de $z = 0$ válida para $|z| > 2$.

3. Considere a função

$$h(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}.$$

[1,0 val] (a) Determine e classifique todas as singularidades de h.

[1,0 val] (b) Indique, justificando, todos os valores possíveis para o integral $\oint_\gamma h(z)\, dz$, onde γ é uma curva de Jordan contida no domínio de h.

[2,0 val] 4. Seja $\varepsilon \in]0, 1[$ um parâmetro real. Use o Teorema dos Resíduos para mostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \operatorname{sen}\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

[2,0 val] 5. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função harmónica. Mostre que se u tem um ponto de máximo local então u é constante.

Fim do 1º Teste e 1ª parte do Exame

[2,0 val] 6. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = (1+y^2)\cos(t), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

7. Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

[1,0 val] (a) Determine a solução geral do sistema $y' = Ay$.

[1,0 val] (b) Indique uma solução particular do sistema $y' = Ay + \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 2e^{4t} \end{smallmatrix}\right]$.

[2,0 val] 8. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''' + y'' + y' + y = 2, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 1, \\ y''(0) = 0. \end{cases}$$

[2,0 val] 9. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 4 = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \\ u(t,0) = 0 & (t > 0), \\ u(t,\pi) = 2\pi^2 + \pi & (t > 0), \\ u(0,x) = 2x^2 + x + 2 & (0 < x < \pi). \end{cases}$$

[2,0 val] 10. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 tal que $\langle f(x), x \rangle \leq M\|x\|^2$, onde $M > 0$ é uma constante. Mostre que as soluções do sistema de equações diferenciais $x' = f(x)$ estão definidas em $\mathbb{R}$.

Fim do 2º Teste e 2ª parte do Exame

1. Considere a função $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(x, y) = \cos(x)e^y$$

[1,0 val] (a) Mostre que v é a parte imaginária de uma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

[1,0 val] (b) Sabendo que $f(0) = i$, determine f.

2. Considere a função

$$g(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}.$$

[1,0 val] (a) Determine a série de Taylor de g em torno de $z = 0$ e indique a sua região de convergência.

[1,0 val] (b) Determine a série de Laurent de g em torno de $z = 0$ válida para $|z| > 2$.

3. Considere a função

$$h(z) = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)}.$$

[1,0 val] (a) Determine e classifique todas as singularidades de h.

[1,0 val] (b) Indique, justificando, todos os valores possíveis para o integral $\oint_\gamma h(z)\, dz$, onde γ é uma curva de Jordan contida no domínio de h.

[2,0 val] 4. Seja $\varepsilon \in \,]0, 1[$ um parâmetro real. Use o Teorema dos Resíduos para mostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - \varepsilon \cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

[2,0 val] 5. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função harmónica. Mostre que se u tem um ponto de mínimo local então u é constante.

Fim do 1º Teste e 1ª parte do Exame

6. Resolva o problema de valor inicial

[2,0 val]
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{y^2}{1+t^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

7. Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

[1,0 val] (a) Determine a solução geral do sistema $y' = Ay$.

[1,0 val] (b) Indique uma solução particular do sistema $y' = Ay + \left[\begin{smallmatrix} 4e^{2t} \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$.

[2,0 val] 8. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 2, \\ y(0) = -1, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = -1. \end{cases}$$

[2,0 val] 9. Resolva o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2 = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(t,0) = 0 & (t < 0), \\ u(t,\pi) = \pi^2 + 2\pi & (t < 0), \\ u(0,x) = x^2 + 2x + 1 & (0 < x < \pi). \end{cases}$$

[2,0 val] 10. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 tal que $\langle f(x), x \rangle \leq M\|x\|^2$, onde $M > 0$ é uma constante. Mostre que as soluções do sistema de equações diferenciais $x' = f(x)$ estão definidas em $\mathbb{R}$.

Fim do 2º Teste e 2ª parte do Exame