Resumos de ACED

José Natário

1 de Junho de 2017

I. Análise Complexa

1. Uma função $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diz-se **diferenciável** em $z_0 \in U$ se existe
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$
2. Se $f = u + iv$, f é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0$ **sse** u e v são diferenciáveis em (x_0, y_0) e satisfazem nesse ponto as **equações de Cauchy-Riemann**:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$
Nesse caso,
$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$
3. Uma função diz-se **holomorfa**, ou **analítica**, se é diferenciável num conjunto aberto. Uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ diz-se **inteira**.
4. Se $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa e $f = u + iv$ então u e v são funções **harmónicas**, i.e., u e v satisfazem a **equação de Laplace**
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$
e dizem-se **harmónicas conjugadas**. Se $u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é harmónica e U é simplesmente conexo é sempre possível determinar a sua harmónica conjugada $v : U \to \mathbb{R}$ resolvendo as equações de Cauchy-Riemann em ordem a v.
5. Se $C \subset \mathbb{C}$ é uma curva seccionalmente C^1 parametrizada por $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ então
$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$
6. **Teorema Fundamental do Cálculo:** Se $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é tal que para qualquer curva fechada $C \subset U$ se tem
$$\oint_C f(z)dz = 0$$
então f é primitivável em U, i.e., existe uma função holomorfa $F : U \to \mathbb{C}$ tal que $F' = f$.

7. **Teorema de Cauchy:** Se $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa, U é simplesmente conexo e $C \subset U$ é uma curva fechada então

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

Mais geralmente, integrais de funções holomorfas em curvas fechadas são **invariantes por homotopia** (i.e., deformação contínua) da curva de integração.

8. Uma **curva de Jordan** é curva fechada **simples** (i.e., sem auto-intersecções). Qualquer curva de Jordan divide $\mathbb{C}$ em duas regiões, uma das quais limitada, à qual chamamos o **interior** de C, $\mathrm{int}(C)$.

9. **Fórmulas Integrais de Cauchy:** Se $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa, $C \subset U$ é uma curva de Jordan, $\mathrm{int}(C) \subset U$ e $z_0 \in \mathrm{int}(C)$ então f tem derivadas de todas as ordens e

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

onde C deve ser percorrida uma vez no sentido directo.

10. **Teorema de Morera:** Se $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é primitivável em U então f é holomorfa em U.

11. **Teorema de Taylor:** Se f é holomorfa no disco $|z - z_0| < r$ então f pode ser expandida em série de potências em torno de z_0,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Esta série converge no interior do maior disco centrado em z_0 no qual f é holomorfa, e pode ser integrada e derivada termo a termo.

12. **Teorema de Laurent:** Se f é holomorfa no anel $r < |z - z_0| < R$ então f pode ser expandida em série de potências negativas e positivas em torno de z_0,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Esta série pode ser integrada e derivada termo a termo.

13. Diz-se que f tem uma **singularidade isolada** em $z_0 \in \mathbb{C}$ se f é holomorfa nalgum disco perfurado $0 < |z - z_0| < r$. Neste caso, f tem uma expansão em série de Laurent

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots \, .$$

O coeficiente a_{-1} desta expansão diz-se o **resíduo** de f em z_0,

$$\mathrm{Res}(f)(z_0) = a_{-1}.$$

Diz-se que f tem um **pólo de ordem** $n \in \mathbb{N}$ em z_0 se a potência negativa de maior ordem em valor absoluto presente na expansão é $(z - z_0)^{-n}$,

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \ldots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

com $a_{-n} \neq 0$. Se a expansão apresenta potências negativas de ordens arbitrariamente altas em valor absoluto diz-se que f tem uma **singularidade essencial** em z_0. Se a expansão não apresenta potências negativas diz-se que f tem uma **singularidade removível** em z_0.

14. É possível mostrar que se f tem uma singularidade isolada em $z_0 \in \mathbb{C}$, esta é removível **sse** existe o limite

$$\lim_{z \to z_0} f(z),$$

é um pólo de ordem n **sse** existe e é $\neq 0$ o limite

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z),$$

e é uma singularidade essencial se o limite acima não existe para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Se z_0 é uma singularidade removível, $\mathrm{Res}(f)(z_0) = 0$. Se z_0 é um pólo de ordem n, é possível mostrar que

$$\mathrm{Res}(f)(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z - z_0)^n f(z) \right].$$

Se z_0 é uma singularidade essencial, o cálculo do resíduo tem que ser feito recorrendo directamente à expansão em série de Laurent.

15. **Teorema dos Resíduos:** Se C é uma curva de Jordan percorrida uma vez no sentido directo e f só possui singularidades isoladas $z_1, \ldots, z_k \in \mathrm{int}(C)$ então

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f)(z_j).$$

16. Uma aplicação comum do Teorema dos Resíduos é no cálculo de integrais de funções racionais em $\mathbb{R}$, como por exemplo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx,$$

e integrais de funções racionais de senos e cosenos em $[0, 2\pi]$, como por exemplo

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos\theta} d\theta.$$

17. **Lema de Jordan:** Seja $a > 0$ e $C_R = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = R, \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ a semicircunferência de raio R. Se f é uma função contínua tal que

$$\lim_{R \to +\infty} \max_{z \in C_R} |f(z)| = 0$$

então

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0.$$

II. Equações Diferenciais Ordinárias

1. Equações Escalares de Primeira Ordem

i. Uma equação escalar de primeira ordem **linear** é da forma

$$\dot{y} + a(t)y = b(t).$$

Definindo

$$\mu(t) = e^{\int a(t)dt}$$

a equação pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)y(t)) = \mu(t)b(t)$$

e a solução é

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int \mu(t)b(t)dt + C\right].$$

ii. Uma equação escalar de primeira ordem diz-se **separável** se pode ser posta na forma

$$f(y)\dot{y} = g(t).$$

A solução desta equação é dada implicitamente por

$$\int f(y)dy = \int g(t)dt + C.$$

iii. Uma equação escalar de primeira ordem diz-se **exacta** se pode ser escrita na forma

$$M(t,y) + N(t,y)\dot{y} = 0$$

com (M,N) um campo fechado, i.e., com (M,N) satisfazendo

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Neste caso, tem-se localmente

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = M \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = N \end{cases}.$$

Esta equação pode ser resolvida para ϕ, e a solução da equação exacta é dada de forma implícita por

$$\phi(t,y) = C.$$

iv. Qualquer equação escalar de primeira ordem é **redutível a exacta**, i.e., pode ser transformada numa equação exacta multiplicando-a por uma função $\mu(t,y)$ apropriada. À função μ chama-se um **factor integrante** para a equação, e pode der calculado resolvendo

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}.$$

Em geral só podemos procurar factores integrante que só dependam de uma das variáveis. Se por exemplo escolhermos $\mu = \mu(t)$ obtemos a equação separável

$$\dot{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}\mu$$

caso o membro da direita não dependa de y. Se escolhermos $\mu = \mu(y)$ obtemos a equação separável

$$\mu' = \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\mu$$

caso o membro da direita não dependa de t. A solução da equação inicial será em qualquer dos casos dada por

$$\phi(t, y) = C$$

onde ϕ satisfaz

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu M \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \mu N \end{cases}.$$

2. **Existência, Unicidade e Prolongamento**

   i. **Teorema de Picard-Lindelöf:** Se $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ é contínua em $(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ e **localmente Lipzshitziana** em $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ então o problema de valor inicial

   $$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = f(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

   possui uma e uma só solução nalgum intervalo $]a, b[\ni t_0$.

   ii. Se $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}$ é contínua em $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ então f é localmente Lipschitziana em U.

   iii. A solução única do problema de valor inicial no Teorema de Picard-Lindelöf pode ser prolongada a um intervalo máximo de definição $]a, b[$. Se $b \neq +\infty$ então ou $\mathbf{y}$ **explode** para $t = b$, i.e., $\lim_{t\to b} \|\mathbf{y}(t)\| = +\infty$, ou $(t, \mathbf{y}(t))$ tende para a fronteira do domínio de f quando $t \to b$. O mesmo se passa com o outro extremo do intervalo.

3. **Sistemas de Equações Lineares**

   i. **Sistemas Homogéneos:** As soluções da equação $\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}$ formam um espaço vectorial de dimensão n. A **solução matricial fundamental** associada a uma base $\{\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)\}$ é a matriz $Y(t) = [\mathbf{y}_1(t) \ldots \mathbf{y}_n(t)]$, e a solução geral é dada por $\mathbf{y}(t) = Y(t)\mathbf{c}$, onde $\mathbf{c}$ é um vector contante.

   ii. **Sistemas Homogéneos de Coeficientes Constantes:** Se A é constante e $\mathbf{v}$ é um vector próprio associado ao valor próprio λ então $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ é uma solução da equação $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ (no caso em que λ é complexo é possível obter soluções reais extraindo as partes reais e imaginárias destas soluções). Se A é diagonalizável isto permite obter uma base do espaço das soluções. Mais geralmente, e^{At} é uma solução matricial fundamental.

   iii. **Cálculo da Exponencial Matricial:** Qualquer matriz $n \times n$ A se pode escrever na forma

   $$A = SJS^{-1}$$

onde

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & & & & \\ & & & & & \dots & & & \\ & & & & & & \lambda_k & \dots & 0 \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}$$

é a **forma canónica de Jordan** da matriz A. Cada bloco corresponde a um vector próprio, sendo a diagonal preenchida com o valor próprio correspondente. Cada valor próprio tem direito a tantos blocos quantos os vectores próprios linearmente independentes que possui, e a soma das dimensões desses blocos deve ser igual à multiplicidade algébrica do valor próprio como raiz do polinómio característico. Tem-se

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$$

onde

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} & \dots & \frac{t^{n_1}}{n_1!}e^{\lambda_1 t} & & & & \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \dots & \frac{t^{n_1-1}}{(n_1-1)!}e^{\lambda_1 t} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_1 t} & & & & \\ & & & & & \dots & & & \\ & & & & & & e^{\lambda_k t} & \dots & \frac{t^{n_k}}{n_k!}e^{\lambda_k t} \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & 0 & \dots & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix}.$$

iv. **Sistemas Não Homogéneos:** O problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

tem solução dada pela **fórmula de variação das constantes**:

$$\mathbf{y}(t) = Y(t)Y(t_0)^{-1}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} Y(t)Y(s)^{-1}\mathbf{b}(s)ds.$$

Em particular, se A é constante temos

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\mathbf{b}(s)ds.$$

4. **Equações Escalares Lineares de Coeficientes Constantes**

   i. **Equação Homogénea:**

$$(D-\lambda)^n y = 0 \Leftrightarrow y(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t} + \ldots + A_n t^{n-1} e^{\lambda t}.$$

   No caso em que λ é uma constante complexa é possível obter soluções reais extraindo as partes reais e imaginárias destas soluções.

   ii. **Método dos Aniquiladores:** Para resolver a equação não-homogénea no caso em que é possível encontrar um polinómio aniquilador para o termo não-homogéneo.

   iii. **Fórmula de Variação das Constantes:** Para resolver a equação não-homogénea no caso em que não é possível encontrar um polinómio aniquilador para o termo não-homogéneo. Neste caso só estamos interessados na primeira componente, e uma solução fundamental é dada pela **matriz Wronskiana**

$$W(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ Dy_1(t) & Dy_2(t) & \ldots & Dy_n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D^{n-1}y_1(t) & D^{n-1}y_2(t) & \ldots & D^{n-1}y_n(t) \end{bmatrix},$$

   onde $\{y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\}$ é uma base de soluções da equação homogénea.

III. Equações Diferenciais Parciais

1. Série de Fourier da função seccionalmente C^1 $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx;$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

Esta série converge para $f(x)$ nos pontos $x \in\,]-L, L[$ em que f é contínua; para $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$ nos pontos $x \in\,]-L, L[$ em que f é descontínua; e para $\frac{1}{2}[f(-L)+f(L)]$ nos extremos do intervalo.

2. Série de Fourier só de senos da função seccionalmente C^1 $f : [0, L] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

onde

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

3. Série de Fourier só de cosenos da função seccionalmente C^1 $f : [0, L] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

onde

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

4. Resolução de problemas bem postos envolvendo Equações Diferenciais Parciais:
   i. Se a equação ou as condições de fronteira não forem homogéneos, subtrair uma solução particular apropriada de modo a obter um problema homogéneo.
   ii. Para resolver um problema homogéneo, separar variáveis, impondo todas as condições de fronteira/iniciais homogéneas. Escrever a solução como uma série de funções e impor as condições de fronteira/iniciais não homogéneas usando séries de Fourier.