

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Ficha de Trabalho 4

1. Determine uma harmónica conjugada de cada uma das funções:

(i) $u(x, y) = xy^3 - x^3y + 2x + 1$; (ii) $u(x, y) = e^{2x} \cos(2y)$;
(iii) $u(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2}) + 2y$; (iv) $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

2. Este exercício ilustra (em casos muito simples) a maneira como podemos usar a análise complexa para resolver a equação de Laplace. Determine uma solução da equação de Laplace (isto é, uma função harmónica) que satisfaça as seguintes condições:

(a) u está definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$u(x, y) = x + 5 \text{ para } x^2 + y^2 = 1, \text{ e } \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} u(x, y) = 5.$$

Sugestão: Considere a função $f(z) = \frac{1}{z}$.

(b) u está definida em \mathbb{R}^2 , $u(0, 0) = 1$, $u(1, 0) = 2$, $u(0, 1) = 3$.

(c) u está definida em \mathbb{R}^2 e $u(x, 0) = e^x$.

3. Calcule

$$\int_{\gamma} \operatorname{Im} z^2 dz,$$

onde γ é a seguinte curva que une 0 a $2 + 4i$:

- O segmento de recta cujos extremos são aqueles dois pontos;
- A concatenação dos segmentos de recta que unem 0 a 2 e 2 a $2 + 4i$;
- A parábola $y = x^2$.

4. Calcule o integral $\int_{\gamma} f(z) dz$, onde:

- $f(z) = e^{|z|^2} \operatorname{Re} z$ e γ é o segmento de recta que une os pontos 0 e $1 + i$;
- $f(z) = z \operatorname{Im} z^2$ e $\gamma = \{z \mid |z| = 1, -\pi \leq \arg z \leq 0\}$ percorrida no sentido directo;
- $f(z) = z\bar{z}$ e $\gamma = \{z \mid |z| = 1\}$ percorrido no sentido horário;
- $f(z) = 1/z$ e $\gamma(t) = e^{it}$, com $t \in [0, 8\pi]$ percorrido no sentido horário;
- $f(z) = e^z$ e γ é a concatenação de segmentos de recta $[0, 1] \cup [1, 1 + i] \cup [1 + i, i]$.

5. Calcule o integral $\int_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{z}} dz$, onde:

- (i) $\gamma = \{z \mid |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ percorrido no sentido directo e se escolhe uma função \sqrt{z} que é contínua sobre γ e verifica $\sqrt{1} = 1$;
 (ii) $\gamma = \{z \mid |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ percorrido no sentido horário e se escolhe uma função \sqrt{z} que é contínua sobre γ e verifica $\sqrt{-i} = (1 - i)/\sqrt{2}$.

6. Mostre que:

- (i) $\left| \oint_{|z-1|=2} \frac{1}{z} dz \right| \leq 4\pi$; (ii) $\left| \oint_{|z|=R} \frac{z-1}{z+1} dz \right| \leq 2\pi \frac{R(R+1)}{R-1}$ para $R > 1$;
 (iii) $\left| \oint_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^4} dz \right| \leq \pi R^{-3}$ em que $\gamma(t) = Re^{it}$ e $t \in [0, \pi]$.

7. Considere o caminho $\gamma : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ definido por $\gamma(\theta) = e^{-\theta+i\theta}$.

- a) Esboce γ .
 b) Calcule $\int_{\gamma} z dz$.

8. Considere as coordenadas polares usuais $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ no conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$, determinadas pelas relações

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \operatorname{sen} \theta. \end{cases}$$

Este exercício vai deduzir a expressão das equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.

(a) Seja $A = \begin{bmatrix} u & w \\ v & x \end{bmatrix}$ uma matriz real 2×2 e $r > 0$. Mostre que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} u & w \\ v & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

sse

$$u = \frac{x}{r} \quad \text{e} \quad w = -rv.$$

(b) Use a regra da derivação da função composta para mostrar que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}.$$

(c) Conclua que uma função $f: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

com u e v de classe C^1 em $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ é diferenciável em $re^{i\theta}$ sse são satisfeitas as **equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares**

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}.$$

(d) Mostre que se $f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ é diferenciável no ponto $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ então

$$f'(re^{i\theta}) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) e^{-i\theta}.$$

(e) Aproveite o resultado das alíneas anteriores para determinar o domínio de diferenciabilidade das seguintes funções (tomando as coordenadas polares $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$) e calcular a derivada nos pontos desse domínio.

(i) $f(z) = \log z$, a função logaritmo determinada pela escolha do argumento principal.

(ii) $f(re^{i\theta}) = -r^3\theta + i(\theta^3 + r^2)$.

(iii) $f(re^{i\theta}) = \log r + r \cos \theta + i(r \sin \theta - r\theta)$.