Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Ficha de Trabalho 12

1. Calcule e^{At} para as seguintes matrizes A.

(i) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix}$; (ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; (iii) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

(iv) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (v) $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; (vi) $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$;

(vii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; (viii) $A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 2 \end{cases}.$$

Sugestão: Determine uma solução particular constante.

3. Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + 2 \\ \dot{y} = 3x - y + 2 \\ \dot{z} = ty - tz \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais $x(0) = y(0) = -1, z(0) = 1$.

Sugestão: Note que as primeiras duas equações não contêm z.

4. Determine a solução geral de cada uma das equações:

(i) $y'' - 2y' - 3y = \cos t$; (ii) $y'' - 2y' + y = te^t$;

(iii) $y^{(4)} + y = t + e^{2t}\sin t$; (iv) $y^{(3)} - 2y^{(2)} = t$.

5. Determine a solução do problema de valor inicial

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y' - 2 = b(t) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y^{(2)}(0) = 1,$$

quando:

(i) $\quad b(t) = 0$; $\quad$ (ii) $\quad b(t) = t$; $\quad$ (iii) $\quad b(t) = e^t$.

6. Ache a solução geral dos seguintes sistemas:

$$\text{(i)} \begin{cases} x' = y - 5e^{2t} \\ y' = 2x + y \end{cases} ; \qquad \text{(ii)} \begin{cases} x' = x + y + 1 + e^t, \\ y' = 3x - y \end{cases} .$$

7. Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t\sqrt{2}} \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \qquad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & -2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad y(0) = 0.$$

9. Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações.
   (a) $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$;
   (b) $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{sen}(e^t)$.

10. Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + 3y' + 2y = (1 + e^x)^{-1}, \quad y(0) = -2, \ y'(0) = -\log 2.$$

11. Considere a equação diferencial

$$y'' + \frac{t}{1-t} y' + \frac{1}{t-1} y = 1 - \frac{1}{t}.$$

   (a) Determine as soluções da equação homogénea da forma $y(t) = t^k$ e $y(t) = e^{\lambda t}$.
   (b) Determine a solução da equação que satisfaz as condições iniciais $y(2) = 1$ e $y'(2) = -1$.

12. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ de componentes reais ou complexas.

    (a) Mostre que, se A e B comutam, então $X(t) = e^{-At}e^{(A+B)t}$ satisfaz o problema de valor inicial $\frac{dX}{dt} = BX$, $X(0) = I$.

    (b) Conclua que se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$.

    (c) Aproveite o resultado para calcular e^{Ct}, onde $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

13. Use a identificação das matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ com os números complexos para calcular $e^{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} t}$.

14. A equação que a carga no condensador de um circuito LRC verifica é:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

em que $q(t)$ é a carga acumulada no condensador no instante t, L a indutância, R a resistência, C a capacidade do condensador e $E(t)$ a diferença de potencial imposta no instante t.

    (i) Determine a carga no condensador no instante $t = 0,01\,\text{s}$, de um circuito LRC com $L = 0,05\,\text{h}$ (Henry), $R = 2\,\Omega$ (ohm), $C = 0,01\,\text{f}$ (farad) e

$$E(t) = 4,25\sin(50t)$$

    (correspondente a uma tensão de corrente alterna de 50 hz e 4,25 V), sendo $q(0) = 5\,\text{C}$ (Coulomb) e $q'(0) = I(0) = 0\,\text{A}$ (Ampére).

    (ii) Supondo que $E(t) = 0$, determine o primeiro instante em que a carga no condensador é igual a zero.