

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Ficha de Trabalho 1

1. Escreva uma expressão para cada um dos seguintes números complexos na forma $re^{i\theta}$:

$$(i) i^3; \quad (ii) 1 - i; \quad (iii) \sqrt{2}(1 + i); \quad (iv) \sqrt{3} - i; \quad (v) 2 - 2\sqrt{3}i;$$
$$(vi) (1 + \sqrt{3}i)^3; \quad (vii) (1 - i)^{-1}; \quad (viii) (\sqrt{3} - i)/(1 + i).$$

2. Escreva uma expressão para cada um dos seguintes números complexos na forma $x + iy$, ($x, y \in \mathbb{R}$):

$$(i) e^{\pi i/4}; \quad (ii) 5e^{-\pi i}; \quad (iii) 2e^{3\pi i/2}; \quad (iv) e^{4\pi i/3}; \quad (v) e^{7\pi i/6}.$$

3. Calcule, para $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$(i) i^n; \quad (ii) \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n; \quad (iii) (1+i)^n + (1-i)^n.$$

4. Encontre todos os valores das raízes:

$$(i) \sqrt[3]{i}; \quad (ii) \sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}; \quad (iii) \sqrt[7]{1+i}; \quad (iv) \sqrt[3]{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}.$$

5. Determine as soluções das equações seguintes:

$$(i) 1 - z + z^2 = 0;$$
$$(ii) 1 - z^2 + z^4 - z^6 = 0;$$
$$(iii) (1 - z)^6 = (1 + z)^6;$$
$$(iv) 1 + z + z^2 + \dots + z^7 = 0;$$
$$(v) z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0.$$

6. Esboce os subconjuntos de \mathbb{C} dados por:

$$(i) |z + 1 - i| = 4;$$
$$(ii) |z - 3i| = |z + i|;$$
$$(iii) \text{Im}(z + i) < 2;$$
$$(iv) |z + 2i| \geq 2;$$
$$(v) |z - 1| \geq |z - 1 - i|;$$
$$(vi) \text{Im}[(z + i)/2i] < 0;$$

- (vii) $1 < |z - 1| < 2$;
- (viii) $\operatorname{Re} z \neq 0$;
- (ix) $|z + i| + |z - 3i| < 6$;
- (x) $|z|^2 > z + \bar{z}$.

7. Mostre que para $x \in \mathbb{R}$ se tem

$$\frac{\sqrt{1+x^2} + ix}{x - i\sqrt{1+x^2}} = i.$$

8. Mostre que $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$.