

Grupos e Álgebras de Lie

2001/2002 – Exame Tipo

Mestrado em Matemática Aplicada

Duração: 2h30

I.

I.1. Sabendo que

$$sp(n, \mathbb{C}) = \{C \in M_n(\mathbb{C}) : e^{sC} \in SP(n, \mathbb{C}), \forall s \in \mathbb{R}\}$$

mostre que $sp(n, \mathbb{C}) = \mathcal{G}$, onde

$$\mathcal{G} = \{C \in M_n(\mathbb{C}) : CJ_n = -J_n C^t\},$$

e

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

I.2. Seja $\mathcal{G} = \text{Lie}(G)$. Mostre que a aplicação exponencial, $\exp : \mathcal{G} \rightarrow G$, é um difeomorfismo de uma vizinhança de $0 \in \mathcal{G}$ para uma vizinhança de $e \in G$.

Sugestão: Use $\exp(tE) = a_1^{(tE)} = a_t^{(E)}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall E \in \mathcal{G}$.

I.3. Mostre que, num grupo de Lie, os campos invariantes à esquerda comutam com os campos invariantes à direita.

II.

II.1. Considere a álgebra de Lie definida por $\mathcal{G} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{X, Y\}$ e $[X, Y] = Y$. Mostre, usando o critério de Cartan, que $\mathcal{G}$ é solúvel.

II.2. Existe algum homomorfismo sobrejectivo de $sl(2, \mathbb{C})$ para $\mathcal{G}$? Porquê?

II.3. Construa um homomorfismo injectivo de $\mathcal{G}$ para $sl(2, \mathbb{C})$.

II.4. Determine o núcleo de ρ_{ad} , a representação adjunta de $SL(n, \mathbb{C})$, $(SL(n, \mathbb{C}), sl(n, \mathbb{C}), \rho_{\text{ad}})$,

$$\rho_{\text{ad}}(A)(C) = ACA^{-1}.$$

III.

III.1

III.1.a) Considere a decomposição em espaços raiz de uma álgebra de Lie semisimples complexa. Mostre que $\mathcal{G}_{\alpha} \perp \mathcal{G}_{\beta}$ (em relação à forma de Killing) se $\alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\}$ e $\alpha + \beta \neq 0$.

III.1.b) Mostre que se $\alpha \in \Delta$ então $-\alpha \in \Delta$.

III.2 Mostre que o grupo de Weyl é um subgrupo finito de $O(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

III.3 Sabendo que $B_2 \cong so(5, \mathbb{C})$ determine o número de raízes positivas de B_2 .
Usando o grupo de Weyl determine, a partir do diagrama de Dynkin para B_2 , as raízes positivas não simples de B_2 .

IV

IV.a) Determine o sistema de pesos da representação irredutível ρ_{λ_1} de $B_4 \cong so(9, \mathbb{C})$.

IV.b) Determine o sistema de pesos da restrição de ρ_{λ_1} a uma subálgebra regular $A_2 \subset B_4$.

IV.c) Diga justificando qual o peso máximo de $\rho = \rho_{\lambda_1} \wedge \rho_{\lambda_1}$.