Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Grupos e Álgebras de Lie

2001/2002 – Resolução do Exame Tipo

Mestrado em Matemática Aplicada

Duração: 2h30

I.

I.1. *Sabendo que*

$$sp(n,\mathbb{C}) = \left\{C \in M_{2n}(\mathbb{C}) : \ e^{sC} \in SP(n,\mathbb{C}) \ , \ \forall s \in \mathbb{R}\right\}$$

mostre que $sp(n,\mathbb{C}) = \mathcal{G}$*, onde*

$$\mathcal{G} = \left\{C \in M_{2n}(\mathbb{C}) : CJ_n = -J_n C^t\right\} \ ,$$

e

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Resolução:
Se $C \in \mathcal{G}$ então $J_n C^t = -CJ_n$ e portanto $J_n(C^t)^k = (-C)^k J_n \ \forall k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned} e^{sC} J_n e^{sC^t} &= e^{sC} J_n \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k (C^t)^k}{k!} \\ e^{sC} \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k(-C)^k}{k!} J_n &= e^{sC} e^{-sC} J_n = J_n \qquad , \forall s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e portanto $C \in sl(n,\mathbb{C})$ e $\mathcal{G} \subset sp(n,\mathbb{C})$.
Seja agora $C \in sp(n,\mathbb{C})$ pelo que

$$e^{sC} J_n e^{sC^t} = J_n \ , \quad \forall s \in \mathbb{R} \ . \tag{1}$$

Derivando ambos os membros de (1) em ordem a s e tomando $s = 0$ obtemos

$$CJ_n + J_n C^t = 0 \ ,$$

e portanto $C \in \mathcal{G}$ e $\mathcal{G} = sp(n,\mathbb{C})$.

I.2. *Seja* $\mathcal{G} = \mathrm{Lie}(G)$*. Mostre que a aplicação exponencial,* $\underline{\exp} : \mathcal{G} \to G$*, é um difeomorfismo de uma vizinhança de* $0 \in \mathcal{G}$ *para uma vizinhança de* $e \in G$*.*
Sugestão: *Use* $\underline{\exp}(tE) = a_1^{(t\varphi(E))} = a_t^{(\varphi(E))}$*,* $\forall t \in \mathbb{R}$*,* $\forall E \in \mathcal{G}$*, onde* $\varphi(E)$ *designa o campo vectorial invariante à esquerda tal que* $\varphi(E)_e = E$*.*

Resolução:
Seja $\mathcal{G} = \mathrm{Lie}(G) = T_eG$. A aplicação $\underline{\exp}$ é de classe C^∞ e $\underline{\exp}(0) = e$ pelo que basta mostrar que a aplicação

$$\underline{\exp}_{*0} \; : \; T_0\mathcal{G} \to T_eG = \mathcal{G}$$

é um isomorfismo de espaços lineares. Mostremos que $\underline{\exp}_{*0}$ é a aplicação inversa do isomorfismo

$$\begin{aligned} \chi_0 \; : \; \mathcal{G} \; &\to T_0\mathcal{G} \\ \chi_0(E) \; &= \tfrac{d}{dt}(tE)_{|t=0} \; . \end{aligned}$$

De facto

$$\underline{\exp}_{*0}(\chi_0(E)) = \underline{\exp}_{*0}(\frac{d}{dt}(tE)_{|t=0}) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\underline{\exp}(tE) = E \; ,$$

uma vez que $\underline{\exp}(tE)$ é a curva integral do campo invariante à esquerda com valor E em $e \in G$.

I.3. *Mostre que, num grupo de Lie G, os campos invariantes à esquerda comutam com os campos invariantes à direita.*
Sugestão: *É suficiente mostrar que os respectivos fluxos comutam.*
Resolução:
Sejam X e Y campos invariantes à esquerda e direita respectivamente. Uma vez que os seus fluxos são $\psi_t^{(X)} = R_{\underline{\exp}(tX)}$ e $\psi_s^{(Y)} = L_{\underline{\exp}(sY)}$ tem-se

$$\left(R_{\underline{\exp}(tX)} \circ L_{\underline{\exp}(sY)}\right)(g) = \underline{\exp}(sY)g\underline{\exp}(tX) =$$

$$= \left(L_{\underline{\exp}(sY)} \circ R_{\underline{\exp}(tX)}\right)(g) \; , \forall s,t \in \mathbb{R} \; , \; \forall g \in G \; ,$$

o que mostra que os fluxos comutam.

II.

II.1. *Considere a álgebra de Lie definida por $\mathcal{G} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{X,Y\}$ e $[X,Y] = Y$. Mostre, usando o critério de Cartan, que $\mathcal{G}$ é solúvel.*
Resolução:
A primeira derivada de $\mathcal{G}$ é

$$\mathcal{G}^{(1)} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{Y\} \; .$$

As matrizes de ad_X e de ad_Y na base $\{X,Y\}$ são

$$(\mathrm{ad}_X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{22} \; , \quad (\mathrm{ad}_Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -P_{21} \; .$$

Os produtos internos de Y com os elementos da base são então $B(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y) = 0$ e $B(Y,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_Y) = 0$ pelo que $\mathcal{G}^{(1)} \perp \mathcal{G}$ e $\mathcal{G}$ é solúvel pelo critério de Cartan.

II.2. *Existe algum homomorfismo sobrejectivo de $sl(2,\mathbb{C})$ para $\mathcal{G}$? Porquê?*

Resolução:
Não porque como condição necessária para a existência de um homomorfismo sobrejectivo de $sl(2,\mathbb{C})$ para $\mathcal{G}$, $sl(2,\mathbb{C})$ teria de ter um ideal de dimensão um. Mas $sl(2,\mathbb{C})$ é simples pelo que não contém ideais próprios diferentes de zero.

II.3. *Construa um homomorfismo injectivo de $\mathcal{G}$ para $sl(2,\mathbb{C})$.*

Resolução: É suficiente encontrar dois elementos linearmente independentes de $sl(2,\mathbb{C})$ $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ que tenham o mesmo parentesis que X e Y ou, mais precisamente, tais que $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]=\widetilde{Y}$. Uma possibilidade é $\widetilde{X}=\frac{1}{2}h$ e $\widetilde{Y}=e$, onde $h=P_{11}-P_{22}$ e $e=P_{12}$ e portanto $[h,e]=2e$. Um homomorfismo é então dado por

$$\varphi(aX+bY)=\frac{a}{2}h+be=\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & b \\ 0 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix} .$$

II.4. *Determine o núcleo de ρ_{Ad}, a representação adjunta de $SL(n,\mathbb{C})$, $(SL(n,\mathbb{C}), sl(n,\mathbb{C}), \rho_{\mathrm{ad}})$,*

$$\rho_{\mathrm{ad}}(A)(C)=ACA^{-1} .$$

Resolução:
O núcleo é dado por

$$Ker(\rho_{\mathrm{ad}})=\left\{A\in SL(n,\mathbb{C})\ :\ ACA^{-1}=C\ ,\ \forall C\in sl(n,\mathbb{C})\right\}=$$

$$=\{A\in SL(n,\mathbb{C})\ :\ AC=CA\ ,\ \forall C\in sl(n,\mathbb{C})\}=\{A=\lambda I_n\ ,\lambda^n=1\}\ ,$$

coincidindo com o centro de $SL(n,\mathbb{C})$ (isomorfo a $\mathbb{Z}_n$).

III.

III.1

III.1.a) *Considere a decomposição em espaços raíz de uma álgebra de Lie semisimples complexa. Mostre que $\mathcal{G}_\alpha\perp\mathcal{G}_\beta$ (em relação à forma de Killing) se $\alpha,\beta\in\Delta\cup\{0\}$ e $\alpha+\beta\neq 0$.*

Resolução:
Se $E_\alpha\in\mathcal{G}_\alpha, E_\beta\in\mathcal{G}_\beta, X\in\mathcal{G}_\lambda$ então

$$\mathrm{ad}_{E_\alpha}\circ\mathrm{ad}_{E_\beta}(X)\in\mathcal{G}_{\lambda+\alpha+\beta}$$

pelo que o endomorfismo $\mathrm{ad}_{E_\alpha} \circ \mathrm{ad}_{E_\beta}$, numa base adaptada à decomposição em espaços raíz, não tem entradas na diagonal se $\alpha + \beta \neq 0$ e assim $B(E_\alpha, E_\beta) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}_{E_\alpha} \circ \mathrm{ad}_{E_\beta}\right) = 0$.

III.1.b) *Mostre que se $\alpha \in \Delta$ então $-\alpha \in \Delta$.*

Resolução:
Como a forma de Killing B de uma álgebra semisimples é não degenerada, se $0 \neq X \in \mathcal{G}_\alpha$ da alínea anterior concluímos que $B(X, \mathcal{G}_{-\alpha}) \neq 0$ pois caso contrário $X \in \mathrm{rad}(B)$.

III.2 *Mostre que o grupo de Weyl é um subgrupo finito de $O(\mathcal{H}^*_{\mathbb{R}}, < \cdot, \cdot >)$.*

Resolução:
O grupo de transformações lineares de Weyl, W, preserva o produto interno $< \cdot, \cdot >$ em $\mathcal{H}^*_{\mathbb{R}}$, $W \subset O(\mathcal{H}^*_{\mathbb{R}}, < \cdot, \cdot >)$, e o sistema de raízes $\Delta \subset \mathcal{H}^*_{\mathbb{R}}$. Consideremos o homomorfismo

$$\varphi \ : \ W \to \mathrm{Trans}(\Delta)$$

$$w \mapsto w_{|\Delta} \ .$$

O grupo $\mathrm{Trans}(\Delta)$ das aplicações bijectivas de Δ em Δ é finito. Uma vez que Δ gera $\mathcal{H}^*_{\mathbb{R}}$, o núcleo de φ é trivial

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{ w \in W \ : \ w_{|\Delta} = Id_\Delta \right\} = \left\{ Id_{\mathcal{H}^*_{\mathbb{R}}} \right\} \ ,$$

pelo que W é isomorfo à sua imagem $\varphi(W) \subset \mathrm{Trans}(\Delta)$ e portanto é um grupo finito.

III.3 *Sabendo que $B_2 \cong so(5, \mathbb{C})$ determine o número de raízes positivas de B_2. Usando o grupo de Weyl determine, a partir do diagrama de Dynkin para B_2, as raízes positivas não simples de B_2.*

Resolução:
Uma vez que $so(5, \mathbb{C})$ coincide com a algebra de Lie das matrizes anti-simétricas 5×5 a sua dimensão é $\dim(so(5, \mathbb{C})) = \dim(B_2) = 5\times4/2 = 10$. Logo o número de raízes positivas é

$$\#(\Delta^+) = \frac{\dim(B_2) - \mathrm{rank}(B_2)}{2} = 4,$$

sendo duas as raízes positivas não simples. A matriz de Cartan obtida a partir do diagrama de Dynkin é

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Aplicando a transformação de Weyl s_{α_1} a α_2 obtemos a raíz positiva

$$s_{\alpha_1}(\alpha_2) = \alpha_2 - 2\frac{<\alpha_1, \alpha_2>}{<\alpha_1, \alpha_1>}\alpha_1 = \alpha_2 - A_{12}\alpha_1 = \alpha_2 + 2\alpha_1 \in \Delta^+ \ .$$

Das propriedades de α-cordas que passam por raízes podiamos concluir desde já que $\alpha_2 + \alpha_1$ também é uma raíz positiva (e portanto a única que faltava). Por outro lado também

$$s_{\alpha_2}(\alpha_1) = \alpha_1 - 2\frac{<\alpha_2, \alpha_1>}{<\alpha_2, \alpha_2>}\alpha_2 = \alpha_1 - A_{21}\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1 \in \Delta^+ \ .$$

IV

IV.a) *Determine o sistema de pesos da representação irredutível ρ_{λ_1} de $B_4 \cong so(9, \mathbb{C})$.*

Resolução:
As linhas da matriz de Cartan transposta de B_2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

dão os coeficientes da decomposição das raízes simples na base de pesos fundamentais. Com base nas propriedades das α cordas através de pesos obtemos o seguinte sistema de pesos para a representação irredutível com peso máximo λ_1:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\
\downarrow \alpha_1 \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\
\downarrow \alpha_2 \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \\
\downarrow \alpha_3 \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & -1 & 2 \\ \hline \end{array} \\
\downarrow \alpha_4 \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\
\downarrow \alpha_4 \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline \end{array} \\
\downarrow \alpha_3 \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} \\
\downarrow \alpha_2 \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\
\downarrow \alpha_1 \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}
\end{array}
$$

IV.b) *Determine o sistema de pesos da restrição de ρ_{λ_1} a uma subalgebra regular $A_2 \subset B_4$.*

Resolução:
Escolhendo a subalgebra A_2 correspondente às raízes simples α_1 e α_2 obtemos da alínea anterior o seguinte sistema de pesos para $\rho_{\lambda_{1_{|A_2}}}$

$$
\begin{array}{ccccc}
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} &
\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} &
\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} &
\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} &
\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\
\downarrow \alpha_1 & & & & \downarrow \alpha_2 \\
\begin{array}{|c|c|}\hline -1 & 1 \\ \hline \end{array} & & & &
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -1 \\ \hline \end{array} \\
\downarrow \alpha_2 & & & & \downarrow \alpha_1 \\
\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & -1 \\ \hline \end{array} & & & &
\begin{array}{|c|c|}\hline -1 & 0 \\ \hline \end{array}
\end{array}
$$

Resolução Alternativa:
Como subalgebra A_2 regular podiamos escolher também a correspondente às raízes simples α_2 e α_3. Da alínea anterior obtemos o seguinte sistema de pesos para $\rho_{\lambda_{1_{|A_2}}}$ para este caso

$$\begin{tikzcd}
\boxed{0 \mid 0} & \boxed{1 \mid 0} \arrow[d, "\alpha_2"] & \boxed{0 \mid 0} & \boxed{0 \mid 1} \arrow[d, "\alpha_3"] & \boxed{0 \mid 0} \\
& \boxed{-1 \mid 1} \arrow[d, "\alpha_3"] & & \boxed{1 \mid -1} \arrow[d, "\alpha_2"] & \\
& \boxed{0 \mid -1} & & \boxed{-1 \mid 0} &
\end{tikzcd}$$

IV.c) *Diga justificando qual o peso máximo de* $\rho = \rho_{\lambda_1} \wedge \rho_{\lambda_1}$.

Observação:

Pode usar o facto de que o peso máximo de uma representação irredutível de peso máximo μ tem multiplicidade um.

Resolução:

Existe uma base de vectores peso da representação $\rho_{\lambda_1} \wedge \rho_{\lambda_1}$ da forma $u \wedge v$, onde u e v são vectores peso da representação ρ_{λ_1}.

Como o peso máximo de uma representação irredutível de peso máximo μ tem multiplicidade um no produto exterior não há nenhum vector com peso 2μ pelo que o peso máximo é $\mu + \tilde{\mu}$, onde $\tilde{\mu}$ é o peso maior a seguir a μ. No caso que estamos a considerar $\mu = \lambda_1$ e $\tilde{\mu} = \lambda_1 - \alpha_1 = -\lambda_1 + \lambda_2$. Um vector peso máximo é dado por $v_1 \wedge v_2$ onde v_1 é um vector peso com peso λ_1 e v_2 é um vector peso com peso $-\lambda_1 + \lambda_2$. O peso máximo é então $\lambda_{max} = \mu + \tilde{\mu} = \lambda_2$.