

Grupos e Álgebras de Lie

2001/2002 – Exame 09/10/2002

Mestrado em Matemática Aplicada

Duração: 3h00

I.

I.1. (2 valores) Determine o centro Z de $SL(n, \mathbb{C})$.

I.2. (1 valor) Construa um isomorfismo entre Z e $\mathbb{Z}_n$.

II. (2.5 valores) Seja A uma álgebra associativa sobre $\mathbb{C}$. Mostre que o conjunto $\text{Der}(A)$ das derivações de A é uma subálgebra de Lie de $\text{End}(A)$.

III.

III.1 (2 valores) Determine uma base de formas-1 invariantes à esquerda em $GL(2, \mathbb{R})$.

III.2 (2 valores) Mostre que uma das formas que encontrou na alínea anterior é invariante à esquerda.

IV (2.5 valores) Determine a álgebra de Lie matricial do grupo de Lorentz $SO(1, n-1)$.

V Seja $(sl(2, \mathbb{C}), V, \rho)$ uma representação de dimensão finita da álgebra de Lie $sl(2, \mathbb{C}) = \text{span}\{h, e, f\}$, $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$.

V.1 (1.5 valores) Mostre que $\text{tr}(\rho(h)) = 0$.

V.2 (1.5 valores) Supondo que os valores próprios de $\rho(h)$ têm todos multiplicidade (algébrica) um e são dados por $\{\lambda_{\max} - 2j, 0 \leq j \leq n; j \in \mathbb{N}\}$ mostre que $\lambda_{\max} = n$.

VI (2.5 valores) Mostre que se $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$, onde $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ são ideais então $\mathcal{G}_1 \perp \mathcal{G}_2$ em relação à forma de Killing.

VII (2.5 valores) Determine os 13 pesos da representação (adjunta) de G_2 com $\lambda_{\max} = \lambda_1$ ($\|\alpha_1\| = \sqrt{3}\|\alpha_2\|$).