

Grupos e Álgebras de Lie

2001/2002 – Exame 17/07/2002

Mestrado em Matemática Aplicada

Duração: 3h00

I.

I.1. (2 valores) Construa um isomorfismo

$$\varphi : (\mathbb{C}^2/\Lambda, +) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*, \cdot) = ((\mathbb{C}^*)^2, \cdot) ,$$

onde $\Lambda = \{(m, 2\pi in) , m, n \in \mathbb{Z}\}$

(**Nota:** não é necessário mostrar que a aplicação que construiu é de facto isomorfismo).

I.2. (1.5 valores) Mostre que um subgrupo aberto de um grupo topológico G é também fechado.

I.3.

I.3.a) (1 valor) Considere o grupo de Lie

$$K = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} , x \in \mathbb{R}^* , y \in \mathbb{R} \right\} \subset SL(2, \mathbb{R}) .$$

Determine a componente conexa da identidade deste grupo (mostre só que o conjunto que indicou é conexo por caminhos).

I.3.b) (0.5 valores) Construa um isomorfismo entre o grupo das componentes e um subgrupo finito de $\mathbb{C}^*$.

II.

II.1. (1.5 valores) Mostre que um campo tensorial $T \in \mathcal{T}(G)$ é invariante à direita no grupo de Lie G se e só se

$$T_g = \tilde{T}_g(K_e) , \forall g \in G .$$

II.2. (1.5 valores) Considere o grupo de Lie K , definido em I.3 com sistema de coordenadas global dado por

$$\psi : K \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \psi(A) = (x, y) .$$

Seja Z um campo vectorial invariante à direita em K tal que $Z_I = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_I$,

$$I = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K . \text{ Determine } Z_{A_0} , A_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ 0 & x_0^{-1} \end{pmatrix} \in K .$$

III.

- III.1** (2 valores) Considere o grupo de Lie K , definido em I.3. Determine a álgebra de Lie linear $\hat{K}$ de K . Verifique que $\hat{K}$ é uma subálgebra de Lie de $sl(2, \mathbb{R})$.
- III.2** (2 valores) Mostre que $\hat{K}$ é a soma semidirecta de duas subálgebras abelianas.
- III.3** (1 valor) Construa um homomorfismo sobrejectivo $\hat{K} \rightarrow \mathbb{R}$. Mostre que a aplicação que construiu é um homomorfismo de álgebras de Lie.

- IV** (2 valores) Considere a decomposição em espaços raiz da álgebra de Lie simples complexa $\mathcal{G}$ em relação ao sistema de raízes Δ . Mostre que se $\alpha, \beta \in \Delta$ então $\beta(H_\alpha)$ é um múltiplo racional de $\alpha(H_\alpha)$ ($\neq 0$).

V

- V.1** (2.5 valores) Seja $(\mathcal{G}, V, \rho)$ uma representação de dimensão finita da álgebra semisimples $\mathcal{G}$ e Δ um sistema de raízes de $\mathcal{G}$. Mostre, usando resultados da teoria de representações de $sl(2, \mathbb{C})$, que os endomorfismos $\rho(H'_\alpha) = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \rho(H_\alpha)$, $\alpha \in \Delta$ são diagonalizáveis e têm valores próprios inteiros.
- V.2** (2.5 valores) A representação adjunta de A_3 é a representação irredutível de peso (= raiz) máximo $\lambda_1 + \lambda_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Determine o sistema de pesos (raízes) positivos a partir da raiz máxima. Diga, justificando, se obteve todos os pesos que esperava obter.