Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 8 de Novembro de 2008 - 11h
Duração: 90 minutos

Resolução abreviada

(3 val.) 1. Considere a função

$$h(x,y) = \begin{cases} 1+\cos\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Diga, justificadamente, se h é contínua na origem.

Resolução: Começamos por ver que

$$\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{||(x,y)|^3 + ||(x,y)||^3}{||(x,y)||^2} = 2||(x,y)|| \longrightarrow 0 \text{ quando } ||(x,y)|| \longrightarrow 0.$$

logo podemos concluir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0$$

e portanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 1+\cos 0 = 2 = h(0,0),$$

o que mostra que h é contínua na origem.

2. Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \sin(x^2-y) + e^{yz}$.

(2 val.) a) Calcule a derivada de f segundo o vector $(1,2,3)$ no ponto $(-1,1,0)$.

Resolução: Sendo f diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ (porque f é claramente de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(-1,1,0) &= \nabla f(-1,1,0).(1,2,3) \\ &= \left(2x\cos(x^2-y), -\cos(x^2-y) + ze^{yz}, ye^{yz}\right)\Big|_{(-1,1,0)}.(1,2,3) \\ &= (-2,-1,1).(1,2,3) = -1 \end{aligned}$$

(2 val.) b) Calcule o gradiente de $f \circ g$ no ponto $(1,1)$, onde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é tal que $g(1,1) = (-1,1,0)$ e g é diferenciável no ponto $(1,1)$ com matriz derivada

$$Dg(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução: Sendo g diferenciável no ponto $(1,1)$ e f diferenciável no ponto $(-1,1,0) = g(1,1)$, temos, pelo teorema de derivação da função composta:

$$\begin{aligned}
\nabla(f \circ g)(1,1) &= Df(g(1,1))Dg(1,1) \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -7 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y,z) = (x^3 + x - 3y - 5, y + z^2)$.

(2 val.) a) Mostre que o conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (0,0)\}$ é uma variedade, e determine a sua dimensão.

Resolução: M é o conjunto de nível 0 da função de classe C^1, F. A derivada de F

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 3x^2+1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2z \end{bmatrix}$$

tem as duas primeiras colunas linearmente independentes em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ uma vez que a matriz quadrada que as gera tem determinante

$$\begin{vmatrix} 3x^2+1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3x^2 + 1 \neq 0.$$

Assim M é uma variedade, e a sua dimensão $\dim(M) = 3 - \mathrm{car}DF(x,y,z) = 3 - 2 = 1$.

(2 val.) b) Determine o espaço normal a M no ponto $(1,-1,1)$ e indique um elemento não-nulo do espaço tangente a M no mesmo ponto.

Resolução: O espaço normal a M no ponto $(1,-1,1)$ é gerado pelas linhas de

$$DF(1,-1,1) = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$(T_{(1,-1,1)}M)^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = c(4,-3,0) + d(0,1,2);\ c,d \in \mathbb{R}\}.$$

Os elementos do espaço tangente a M no ponto $(1,-1,1)$ satisfazem:

$$\begin{cases} 4x & -3y & & = 0 \\ & y & +2z & = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, vem: z livre, $y = -2z$, $4x = 3y = -6z$. Escolhendo $z = 1$, um elemento não-nulo do espaço tangente a M no ponto $(1,-1,1)$? $(-3/2,-2,1)$.

(3 val.) c) Justifique que numa vizinhança do ponto $(1,-1,1)$, a variedade pode ser descrita na forma $x = f_1(y)$ e $z = f_2(y)$, com f_1, f_2 funções de classe C^1, definidas numa vizinhança do ponto $y = -1$. Calcule $f_1'(-1)$ e $f_2'(-1)$.

Resolução: Temos 1) $F \in C^1$, 2) $F(1,-1,1) = (0,0)$, 3):

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}\Bigg|_{(1,-1,2)} = \det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 8 \neq 0.$$

Assim, pelo teorema da função implícita, numa vizinhança do ponto $(1,-1,1)$, a variedade pode ser descrita na forma $x = f_1(y)$ e $z = f_2(y)$, com f_1, f_2 funções de classe C^1, definidas numa vizinhança do ponto $y = -1$. Temos ainda:

$$\begin{bmatrix} f_1'(-1) \\ f_2'(-1) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

(3 val.) 4. Determine os valores máximo e mínimo da função $g(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2)} - z^2$ no conjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Resolução: Como o conjunto S é compacto e g é contínua, sabemos, pelo Teorema de Weierstrass, que g tem máximo e mínimo absolutos no conjunto S.

No interior de S procuramos os pontos de estacionaridade não condicionados de g, ou seja, os pontos onde o gradiente se anula. Como

$$\nabla g(x,y,z) = (-2xe^{-(x^2+y^2)}, -2ye^{-(x^2+y^2)}, -2z),$$

a única solução é a origem e nesse ponto temos $g(0,0,0) = 1$.

A fronteira de S é uma variedade de dimensão 2, definida pela equação $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$, logo podemos usar o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os extremos de g em ∂S. Obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla F(x,y,z) \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2xe^{-(x^2+y^2)} = 2\lambda x \\ -2ye^{-(x^2+y^2)} = 2\lambda y \\ -2z = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(\lambda + e^{-(x^2+y^2)}) = 0 \\ 2y(\lambda + e^{-(x^2+y^2)}) = 0 \\ 2z(\lambda+1) = 0 \\ x^2+y^2+z^2-1 = 0 \end{cases}$$

As soluções deste sistema são os pontos $(0,0,\pm 1)$ onde o valor da função é $g(0,0,\pm1) = 0$ e todos os pontos da circunferência definida pelas equações $x^2+y^2 = 1$ e $z = 0$. Nestes pontos o valor da função é e^{-1}. Portanto o valor máximo da função g no conjunto S é 1 e o valor mínimo é 0.

(3 val.) 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função limitada (não necessariamente contínua). Mostre que

$$h(x,y) = x + y + (x^2+y^2) f(x,y)$$

é diferenciável na origem e calcule $\nabla h(0,0)$. Dê um exemplo de uma função f tal que h não seja contínua em $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$.

Resolução: A função h é diferenciável na origem sse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x,y) - h(0,0) - \nabla h(0,0) \cdot (x,y)}{\| \, (x,y) \, \|} = 0$$

Usamos a definição para calcular as derivadas parciais de h na origem:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(t,0)-h(0,0)}{t} = 1,$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(0,t)-h(0,0)}{t} = 1.$$

Assim obtemos $\nabla h(0,0) = (1,1)$ e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x,y)-h(0,0)-\nabla h(0,0)\cdot(x,y)}{\| (x,y) \|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} f(x,y).$$

Como f é limitada existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left|\sqrt{x^2+y^2} f(x,y)\right| = \sqrt{x^2+y^2}|f(x,y)| \leq M \| (x,y) \|,$$

donde se conclui que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} f(x,y) = 0$$

e h é diferenciável na origem.

Se considerarmos a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{caso contr?rio} \end{cases}$$

vemos que f é limitada em $\mathbb{R}^2$ e h é descontínua em (todos os pontos de) $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$.