Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC
Teste 1 - 19 de Abril de 2008 - 9h - Versão 1
Duração: 90 minutos

Resolução abreviada

(3 val.) 1. Calcule ou mostre que não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - y^3}{x^3 + 3y^2}.$$

Resolução:

Os limites direccionais na origem segundo rectas, $y = mx$, são diferentes para diferentes valores de m:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{2x^2 - y^3}{x^3 + 3y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - m^3x^3}{x^3 + 3m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2 - m^3x}{x + 3m^2} = \frac{2}{3m^2}.$$

Logo não existe o limite da função na origem.

(3 val.) 2. Seja $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $\nabla h(e, 0, 1) = (2, 0, 1)$ e seja

$$g(x, y) = (e^{x+y}, x^2y, \cos(xy)).$$

Calcule a derivada de $h \circ g$ no ponto $(1, 0)$ segundo o vector $v = (1, 1)$.

Resolução:

$$\begin{aligned} D_v(h \circ g)(1, 0) &= D(h \circ g)(1, 0) \cdot v \\ &= \nabla h(g(1, 0)) \cdot Dg(1, 0) \cdot v \\ &= \nabla h(e, 0, 1) \cdot Dg(1, 0) \cdot v \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & e \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4e. \end{aligned}$$

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f(x, y) = x^3 - y^2 + xy$.

Resolução: Os pontos de estacionaridade de f satisfazem:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + y, -2y + x) = (0, 0).$$

Obtemos as soluções $(0, 0)$ e $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$. A matriz Hessiana de f nestes pontos é dada por

$$D^2 f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D^2 f(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Para o ponto $(0,0)$ a equação característica é

$$\det\left(D^2 f(0,0) - \lambda\ I_2\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1-\sqrt{2} < 0, \lambda_2 = -1+\sqrt{2} > 0.$$

Como a Hessiana neste ponto tem um valor próprio positivo e outro negativo, concluímos que $(0,0)$ é um ponto sela.

Para o ponto $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$ a equação característica é

$$\det\left(D^2 f(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}) - \lambda\ I_2\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} < 0, \lambda_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} < 0.$$

Como a Hessiana neste ponto tem ambos os valores próprios negativos, concluímos que $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$ é um máximo local.

4. Considere a variedade $E \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 8 = 0\}.$$

(3 val.) a) Determine o espaço tangente a E no ponto $(1,1,1)$.

Resolução:

Seja $F(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 8$. O vector $\nabla F(1,1,1) = (2,8,6)$ gera o espaço normal a E no ponto $(1,1,1)$. Logo, o espaço tangente é dado por,

$$T_{(1,1,1)}E = \{a(-4,1,0) + b(0,3,-4), a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(3 val.) b) Justifique que, numa vizinhança do ponto $(1,1,1) \in E$, é possível descrever E como o gráfico de uma função de classe C^1 da forma $y = \phi(x,z)$. Calcule $D\phi(1,1)$.

Resolução:

Temos que F é de classe C^1 e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) = 8 \neq 0.$$

Logo, pelo teorema da função implícita existe uma função de classe C^1, $\phi(x,z)$ definida numa vizinhança aberta V de $(1,1)$ tal que $\phi(1,1) = 1$ e $F(x, \phi(x,z), z) = 0$ em V e temos

$$\begin{aligned} D\phi(1,1) &= -(D_y F(1,1,1))^{-1} D_{xz} F(1,1,1) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1)} D_{xz} F(1,1,1) = \\ &= -\frac{1}{8}\ (2,6) = (-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}). \end{aligned}$$

(2 val.) 5. De todas as latas cilíndricas (com fundo e com tampa) com volume $1m^3$, determine a que tem área mínima.

Resolução:

Seja x o raio da lata e y a sua altura. Então a área é

$$f(x,y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy,$$

e o volume é

$$F(x,y) = \pi x^2 y.$$

Para minimizar a área sobre todas as latas de volume 1 devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla F \\ F = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\pi x + 2\pi y = 2\lambda \pi xy \\ 2\pi x = \lambda \pi x^2 \\ \pi x^2 y = 1 \end{cases}$$

Como x não pode ser zero, vem

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ \lambda x = 2 \\ 2\pi x^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 2x = 2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

(3 val.) 6. Demonstre o Teorema da Função Inversa a partir do Teorema da Função Implícita.

Resolução:

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\det Df(a) \neq 0$. Queremos mostrar que existe uma vizinhança $U \ni a$ na qual f é injectiva e a sua inversa local é de classe C^1. Para tal, considere-se a função $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(x,y) = f(x) - y.$$

O conjunto de nível $F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é exactamente o gráfico de f. Seja $b = f(a)$; então $F(a,b) = 0$ e

$$\det \frac{\partial F}{\partial x}(a,b) = \det Df(a) \neq 0.$$

Logo pelo Teorema da Função Implícita existem vizinhanças $U \ni a$ e $V \ni b$ e uma função de classe C^1 $g : V \to U$ tal que para $(x,y) \in U \times V$ se tem

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = g(y),$$

isto é,

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y).$$

Portanto f é invertível e a sua inversa local g é de classe C^1.