Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste - 7 de Junho de 2008 - Versão A
(Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC)
Duração: 1h30m
Apresente e justifique todos os cálculos

Resolução Abreviada

(3.5 val.) 1. Use um integral iterado da forma $\int(\int(\int \; dz)dx)dy$ para calcular a carga eléctrica do sólido

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 < z < 3-y,\, 0 < y < 3-x^2\right\},$$

supondo que a densidade de carga de B é dada pela função $\sigma(x,y,z) = -3$.

Resolução:

A carga eléctrica de B é, $Q_B = \iiint_B \sigma$. Em B temos $0 < y < 3$. Os cortes de B com $y = const$ são rectangulos dados, no plano Oxz, por

$$A_y = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 < z < 3-y,\; -\sqrt{3-y} < x < \sqrt{3-y}\right\}.$$

Temos então

$$\begin{aligned} Q_B &= -3 \int_0^3 \left(\int_{-\sqrt{3-y}}^{\sqrt{3-y}} \left(\int_0^{3-y} 1 \; dz \right) dx \right) dy = \\ &= -3 \int_0^3 \int_{-\sqrt{3-y}}^{\sqrt{3-y}} (3-y) \; dx \; dy = \\ &= -6 \int_0^3 (3-y)^{\frac{3}{2}} \; dy = -\frac{12}{5} \, 3^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

(4 val.) 2. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 < 5,\, 0 < y < 2\},$$

com densidade de massa dada pela função $f(x,y,z) = 2-y$.

Resolução:

O sólido tem simetria de rotação em torno do eixo Oy pelo que usamos coordenadas cilíndricas adaptadas ao problema $g \;:\; x = \rho\cos(\theta),\; y = y,\; z = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$. Nestas coordenadas $g^{-1}(\widetilde{A}) \;:\; \rho^2 + y^2 < 5,\; 0 < y < 2$ e $0 < \theta < 2\pi$, onde $\widetilde{A} = A \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = 0,\; x \geq 0\}$. Então,

$$M_A = \iiint_A (2-y) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{5-y^2}} (2-y)\, \rho \; d\rho \; dy = \frac{26}{3}\,\pi.$$

(3.5 val.) 3. Calcule o trabalho realizado pelo campo

$$F(x,y,z) = (z\ \cos(xz)\ ,\ y\ ,\ x\cos(xz))\ ,$$

ao longo da curva

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1,\ z = 0,\ y \geq 0,\ x \geq 0\right\},$$

do ponto $(3,0,0)$ ao ponto $(0,1,0)$.

Resolução:

O campo F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Verifiquemos que é fechado:

$$\begin{array}{rclcrcl} \frac{\partial}{\partial x}F_2 & = & \frac{\partial}{\partial y}F_1 & \Leftrightarrow & 0 & = & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}F_3 & = & \frac{\partial}{\partial z}F_1 & \Leftrightarrow & \cos(xz) - zx\mathrm{sen}(xz) & = & \cos(xz) - zx\mathrm{sen}(xz) \\ \frac{\partial}{\partial y}F_3 & = & \frac{\partial}{\partial z}F_2 & \Leftrightarrow & 0 & = & 0. \end{array}$$

Como o domínio de F é $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^3$ é simplesmente conexo, concluímos que F é gradiente no seu domínio. Encontremos um potencial escalar para F, $\varphi\ :\ F = \nabla\varphi$. Temos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = z\cos(xz) \Leftrightarrow \varphi = \mathrm{sen}(xz) + c_1(y,z).$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = y \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{sen}(xz) + c_1(y,z)\right) = y \Leftrightarrow \frac{\partial c_1}{\partial y} = y \Leftrightarrow$$

$$c_1 = \frac{y^2}{2} + c_2(z) \Rightarrow \varphi = \mathrm{sen}(xz) + \frac{y^2}{2} + c_2(z).$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{sen}(xz) + \frac{y^2}{2} + c_2(z)\right) = x\cos(xz) \Leftrightarrow \frac{d}{dz}c_2 = 0.$$

Escolhemos $c_2 = 0$, pelo que um potencial de F é dado por

$$\varphi(x,y,z) = \mathrm{sen}(xz) + \frac{y^2}{2}.$$

Aplicando o teorema fundamental do cálculo para integrais de linha obtemos

$$\int_C F = \int_C \nabla\ \varphi = \varphi(0,1,0) - \varphi(3,0,0) = \frac{1}{2}.$$

4. Considere a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} = 2 - z^2\ ,\ x^2+y^2 > 1\right\},$$

orientada com a normal unitária, n_S, tal que $n_S(2,0,0) = (-1,0,0)$.

(3 val.) a) Calcule o fluxo do campo $F(x,y,z) = (x + \operatorname{sen}(y^2+z^2), y, z+1)$ através de S no sentido de n_S.

Resolução:

Em coordenadas cilíndricas temos $\rho = 2 - z^2$ e $1 < \rho < 2$, pelo que a superfície S pode ser obtida rodando a parábola $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = 2 - z^2, y = 0,\ 1 < x < 2\}$ em torno do eixo Oz. Apliquemos o teorema da divergência. Seja

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \sqrt{x^2+y^2} < 2 - z^2, -1 < z < 1\right\}.$$

Temos que $\partial D = S \cup T_1 \cup T_2$, onde as "tampas" T_1 e T_2 são

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = -1,\ x^2+y^2 \le 1\} \\ T_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1,\ x^2+y^2 \le 1\}. \end{aligned}$$

Do teorema da divergência obtemos

$$\begin{aligned} \iiint_D \operatorname{div} F &= -\iint_S F \cdot n_S + \iint_{T_1} F \cdot n_1 + \iint_{T_2} F \cdot n_2 \ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \iint_S F \cdot n_S &= -\iiint_D \operatorname{div} F + \iint_{T_1} F \cdot n_1 + \iint_{T_2} F \cdot n_2, \end{aligned}$$

onde n_1 e n_2 são as normais unitárias de T_1 e T_2 exteriores a D, $n_1 = (0,0,-1)$ e $n_2 = (0,0,1)$, e o sinal de menos no fluxo por S deve-se ao facto da normal unitária n_S estar apontada para o interior de D.

Em coordenadas cilíndricas, $g^{-1}(\widetilde{D}) :\ -1 < z < 1,\ 0 < \rho < 2 - z^2,\ 0 < \theta < 2\pi$. Como $\operatorname{div} F = 3$, temos

$$\iiint_D \operatorname{divF} = 3 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \int_0^{2-z^2} \rho \ d\rho dz d\theta = 3\pi \int_{-1}^{1} (2-z^2)^2 \ dz = \frac{86}{5}\pi.$$

Em T_1, a função integranda é, $F \cdot n_1 = 0$ pelo que $\iint_{T_1} F \cdot n_1 = 0$. Em T_2, $F \cdot n_2 = 2$, pelo que o fluxo é,

$$\iint_{T_2} F \cdot n_2 = 2 \ \operatorname{area}(T_2) = 2\pi.$$

O fluxo através de S é então

$$\iint_S F \cdot n_S = -\frac{86}{5}\pi + 2\pi = -\frac{76}{5}\pi.$$

(3 val.) b) Calcule, usando o teorema de Stokes e o teorema da divergência, o trabalho realizado pelo campo $G(x,y,z) = (2y, x, y)$, ao longo do bordo ∂S de S, orientado no sentido induzido por n_S.

Resolução:
Temos, pelo teorema de Stokes,

$$\oint_{\partial S} G = \iint_S \text{rot}G \cdot n_S$$

e

$$\begin{aligned}\text{rot } G &= \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}G_3 - \frac{\partial}{\partial z}G_2\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}G_1 - \frac{\partial}{\partial x}G_3\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}G_2 - \frac{\partial}{\partial y}G_1\right) = \\ &= (1, 0, -1).\end{aligned}$$

Vamos agora usar o teorema da divergência para calcular $\iint_S \text{rot}G \cdot n_S$. Analogamente à alínea anterior

$$\iint_S \text{rot } G \cdot n_S = \iint_{T_1} \text{rot } G \cdot n_1 + \iint_{T_2} \text{rot } G \cdot n_2,$$

uma vez que $\text{div}(\text{rot } G) = 0$. Temos $\text{rot } G \cdot n_1 = 1$ e $\text{rot } G \cdot n_2 = -1$ e portanto

$$\oint_{\partial S} G \overset{\text{TS}}{=} \iint_S \text{rot } G \cdot n_S \overset{\text{TD}}{=} \text{area}(T_1) - \text{area}(T_2) = \pi - \pi = 0.$$

(3 val.) 5. Usando o teorema de Green, prove o teorema de divergência para um domínio regular $D \subset \mathbb{R}^2$ e para um campo vectorial, $f = (f_1, f_2)$, de classe C^1 num aberto que contém o fecho de D, ou seja

$$\int_{\partial D} f \cdot n = \iint_D \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y},$$

onde n é a normal unitária a ∂D que aponta para o exterior de D.

Resolução: Vamos supor que a fronteira ∂D tem só uma componente conexa (é fácil adaptar o raciocínio ao caso geral). Seja $g(t) = (x(t), y(t))$, $t \in]a, b[$ uma parametrização de ∂D (excluindo um ponto) com orientação positiva (antihorária). Sendo $g'(t) = (x'(t), y'(t))$ tangente a ∂D em cada ponto, um vector normal unitário a ∂D é dado por

$$n = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(-y'(t))^2 + (x'(t))^2}}$$

Esta normal aponta para o exterior de D, porque o produto externo $(y'(t), -x'(t), 0) \times (x'(t), y'(t), 0)$ tem 3ª componente positiva. Assim temos

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} f \cdot n &= \int_a^b f(g(t)) \cdot \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(-y'(t))^2 + (x'(t))^2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \\ &= \int_a^b f(g(t)) \cdot (y'(t), -x'(t))\, dt \\ &= \int_a^b (-f_2(g(t)), f_1(g(t))) \cdot (x'(t), y'(t))\, dt \\ &= \iint_D \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y},\end{aligned}$$

onde na última passagem aplicamos o teorema de Green ao campo $(-f_2, f_1)$.