Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC
Teste 1 - 18 de Abril de 2009 - 11h - Versão 1
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a seguinte função definida em $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Estude f quanto à continuidade.

(1 val.) (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável.

(3 val.) (a) Supondo que a derivada de f no ponto $(2,4)$ na direcção do vector $(1,1)$ é 5, e na direcção do vector $(-1,2)$ é 4, mostre que $\nabla f(2,4) = (2,3)$.

(2 val.) (b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função $g(t) = f(t,t^2)$. Justifique que g é diferenciável e determine $g'(2)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f(x,y) = x^2 e^{-x^2} - y^2$.

(2 val.) 4. (a) Mostre que a equação $y + y^3 = x^2 + 2xz + 2z^2$ define localmente y como função de x e z (isto é $y = f(x,z)$) numa vizinhança do ponto $(0,0,0)$, onde f é uma função de classe C^1.

(2 val.) (b) Calcule a derivada de f no ponto $(0,0)$.

(2 val.) (c) Prove que f possui um mínimo local no ponto $(0,0)$.

(3 val.) 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável tal que $\nabla f(x,y) = 0$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é constante.