

Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste - 9 de Junho de 2007

(Todos os cursos excepto LEB, LEBM, LEFT, LEMAT, LEQ, LMAC, LQ)

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

Resolução resumida

1. Considere o sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1; 0 < z < 1 + y\},$$

cuja densidade de massa é constante e igual a um.

(2 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

Resolução: [Esboçar o conjunto e os cortes relevantes] Concluímos que

$$\text{vol}(S) = \int_0^2 \left(\int_{z-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \right) dy \right) dz.$$

(2 val.) b) Calcule, em coordenadas cilíndricas, o momento de inércia de S relativo ao eixo Oz .

Resolução: Em coordenadas cilíndricas as desigualdades que definem (a imagem de) S tomam a forma

$$\rho < 1; 0 < z < 1 + \rho \text{sen}(\theta).$$

Tem-se então:

$$I_{zz}(S) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1+\rho \text{sen} \theta} \rho^2 \rho dz \right) d\rho \right) d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

(3 val.) 2. Calcule o trabalho realizado pelo campo

$$F(x, y, z) = \left(x + \frac{3y}{(x+1)^2 + y^2}, y - \frac{3(x+1)}{(x+1)^2 + y^2}, z^2 \right),$$

ao longo da elipse definida por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x+1)^2 + 2y^2 = 1; z = 0\}$ e percorrida uma vez no sentido horário quando vista do ponto $(0, 0, 10)$.

Resolução:

$$F(x, y, z) = -3G(x, y, z) + H(x, y, z)$$

em que

$$G(x, y, z) = \left(-\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}, 0 \right); \quad H(x, y, z) = (x, y, z^2)$$

[Verificar que o campo H é fechado] Como o seu domínio, $D_H = \mathbb{R}^3$, é simplesmente conexo, concluímos que o campo H é gradiente e, portanto, o respectivo trabalho na elipse é nulo.

O campo G é um campo “ralo da banheira” pelo que é fechado mas não é gradiente no seu domínio. A elipse é homotópica, no domínio de G , à circunferência definida por $(x+1)^2 + y^2 = 1$; $z = 0$ e percorrida uma vez no sentido horário quando vista do ponto $(0, 0, 10)$. O trabalho de G nesta circunferência é igual a -2π [Fazer as contas deste trabalho]. Portanto, o trabalho de F é igual a 6π .

(2 val.) 3. Calcule o trabalho realizado pelo campo

$$F(x, y) = (\sin(x^2) - y^3, x^3 + y^2),$$

ao longo da circunferência definida por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ e percorrida uma vez no sentido anti-horário.

Resolução: Pelo teorema de Green, o trabalho de F é dado pelo integral

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 3r^2 r dr \right) d\theta = \frac{3}{2}\pi.$$

4. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2; 1 < y < 4\},$$

orientada com a normal n cuja segunda componente é positiva.

(2 val.) a) Sabendo que S tem densidade de massa dada por $\alpha(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + z^2)}$, calcule a massa total de S .

Resolução: Considerando a parametrização

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho^2, \rho \sin \theta); \quad 0 < \theta < 2\pi; \quad 1 < \rho < 2,$$

[Calcular $\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}$] a massa de S é dada pelo integral

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 \alpha(g(\rho, \theta)) \left\| \frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| d\rho d\theta = 2\pi \int_1^2 \rho(1 + 4\rho^2) d\rho = 33\pi.$$

- (3 val.) b) Calcule o fluxo do campo vectorial $f(x, y, z) = (2x, -y, -z)$ através de S no sentido da normal n .

Resolução: Sendo $\operatorname{div} f = 0$ e aplicando o teorema da divergência ao sólido definido por $x^2 + z^2 < y$ e $1 < y < 4$, temos

$$\int \int_S f \cdot \nu_S + \int \int_{T_1} f \cdot \nu_{T_1} + \int \int_{T_2} f \cdot \nu_{T_2} = 0,$$

em que T_1 é a superfície dada por $y = 1$; $x^2 + z^2 < 1$ e T_2 é a superfície dada por $y = 4$; $x^2 + z^2 < 4$.

Dado que

$$f \cdot \nu_{T_1} = (2x, -1, z) \cdot (0, -1, 0) = 1 \quad ; \quad f \cdot \nu_{T_2} = (2x, -4, z) \cdot (0, 1, 0) = -4,$$

obtemos

$$\int \int_S f \cdot \nu_S = 15\pi.$$

Sendo $\nu_S = -n$ a normal exterior ao sólido em S concluímos que

$$\int \int_S f \cdot n = -15\pi.$$

- (3 val.) c) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = (2xy, -2y^2, 2yz)$$

através de S , no sentido da normal n .

Resolução: Temos que $\operatorname{div}(F) = 0$ e o domínio de F , $D_F = \mathbb{R}^3$, é um conjunto em estrela pelo que F é um campo rotacional, i.e. existe um campo vectorial A de classe C^2 em \mathbb{R}^3 tal que

$$\operatorname{rot}(A) = F \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 2xy \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = -2y^2 \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 2yz \end{cases} \quad (1)$$

Escolhemos $A_3 = 0$ pelo que o sistema se simplifica

$$\begin{cases} -\frac{\partial A_2}{\partial z} = 2xy \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} = -2y^2 \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 2yz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2 = -2xyz + C_2(x, y) \\ A_1 = -2y^2z + C_1(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(-2xyz + C_2) - \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2z + C_1) = 2yz \end{cases}$$

$$-2yz + \frac{\partial C_2}{\partial x} + 4yz - \frac{\partial C_1}{\partial y} = 2yz \Leftrightarrow \frac{\partial C_2}{\partial x} - \frac{\partial C_1}{\partial y} = 0.$$

Podemos escolher $C_1 = C_2 = 0$ pelo que um potencial vector A do campo F é $A = (-2y^2z, -2xyz, 0)$.

Então,

$$\iint_S F \cdot n = \iint_S \operatorname{rot} A \cdot n = \oint_{\Gamma_1} A \cdot d\gamma_1 + \oint_{\Gamma_2} A \cdot d\gamma_2$$

em que Γ_1 é a circunferência definida por $y = 1$; $x^2 + z^2 = 1$ e parametrizada por $\gamma_1(t) = (\cos t, 1, \sin t)$, e Γ_2 é a circunferência definida por $y = 4$; $x^2 + z^2 = 4$ e parametrizada por $\gamma_2(t) = (2 \cos t, 4, -2 \sin t)$. [note o sinal no seno]

Assim, temos

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot n &= \iint_S \operatorname{rot}(A) \cdot n = \\ &= \int_{\Gamma_1} A \cdot d\gamma_1 + \int_{\Gamma_2} A \cdot d\gamma_2 = \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 \sin(\theta), -2 \cos(\theta) \sin(\theta), 0) \cdot (-\sin(\theta), 0, \cos(\theta)) \, d\theta + \\ &+ \int_0^{2\pi} (64 \sin(\theta), 32 \cos(\theta) \sin(\theta), 0) \cdot (-2 \sin(\theta), 0, -2 \cos(\theta)) \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \sin^2(\theta) \, d\theta - 128 \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \, d\theta = \dots = -126\pi. \end{aligned}$$

- (3 val.) 5. Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e considere o campo vectorial $G(x, y, z) = \phi(r)(x, y, z)$, onde $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 . Sabendo que $\phi(1) = 1$ e $\operatorname{div} G = 0$, determine ϕ , sem calcular $\operatorname{div} G$ directamente.

Resolução: Estando G definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, consideremos o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < R\}.$$

Note-se que a fronteira de V é constituída por duas superfícies esféricas de raios 1 e R , respectivamente. As respectivas normais unitárias e exteriores a V são os vectores $-(x, y, z)$ e $\frac{1}{R}(x, y, z)$.

Sabendo que $\phi(1) = 1$ e $\operatorname{div} G = 0$, aplicando o teorema de Gauss em V , obtemos

$$0 = -4\pi\phi(1) + 4\pi R^3\phi(R),$$

ou seja,

$$\phi(r) = \frac{1}{r^3}.$$