Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste - 9 de Junho de 2007
(Todos os cursos execepto LEB, LEBM, LEFT, LEMAT, LEQ, LMAC, LQ)
Duração: 1h30m
Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\,;\, 0 < z < 1 + y\},$$

cuja densidade de massa é constante e igual a um.

(2 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(2 val.) b) Calcule, em coordenadas cilíndricas, o momento de inércia de S relativo ao eixo Oz.

(3 val.) 2. Calcule o trabalho realizado pelo campo

$$F(x, y, z) = \left(x + \frac{3y}{(x+1)^2 + y^2}\,,\, y - \frac{3(x+1)}{(x+1)^2 + y^2}\,,\, z^2\right),$$

ao longo da elipse definida por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x+1)^2 + 2y^2 = 1\,;\, z = 0\}$ e percorrida uma vez no sentido horário quando vista do ponto $(0, 0, 10)$.

(2 val.) 3. Calcule o trabalho realizado pelo campo

$$F(x, y) = (\operatorname{sen}(x^2) - y^3\,,\, x^3 + y^2),$$

ao longo da circunferência definida por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ e percorrida uma vez no sentido anti-horário.

4. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2\,;\, 1 < y < 4\},$$

orientada com a normal n cuja segunda componente é positiva.

(2 val.) a) Sabendo que S tem densidade de massa dada por $\alpha(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + z^2)}$, calcule a massa total de S.

(3 val.) b) Calcule o fluxo do campo vectorial $f(x, y, z) = (2x, -y, -z)$ através de S no sentido da normal n.

(3 val.) c) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = (2xy, -2y^2, 2yz)$$

através de S, no sentido da normal n.

(3 val.) 5. Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e considere o campo vectorial $G(x, y, z) = \phi(r)(x, y, z)$, onde $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é de classe C^1. Sabendo que $\phi(1) = 1$ e $\operatorname{div} G = 0$, determine ϕ, *sem calcular* $\operatorname{div} G$ *directamente*.