

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II  
TODOS OS CURSOS EXCEPTO LEB, LEBM, LEFT, LEMAT, LEQ, LMAC, LQ  
TESTE 1 – 28 DE ABRIL DE 2007 – VERSÃO 2

apresente e justifique todos os cálculos

duração: 90 minutos

(3 val.) (1) Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} 3 + 4 \frac{2x^2y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ a, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Determine, justificando, o valor de  $a$  para que  $f$  seja contínua na origem.

(2 val.) (2) Considere a função  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $g(x, y) = (xy, x^2 + y^2)$  e a função de classe  $C^1$ ,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $f(1, 1, 1) = (1, 2)$  e

$$Df(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule a derivada de  $g \circ f$  no ponto  $(1, 1, 1)$ , segundo o vector  $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

(3 val.) (3) Determine e classifique os pontos críticos do campo escalar dado por

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + \frac{2}{3}z^3 - 2z.$$

(4) O tempo  $t$  e as coordenadas  $(x, y)$  de um ponto em movimento no plano satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2ye^{y-1} = t \\ x^2 + y^2 = \cos^2(\frac{\pi}{2}t) + 1. \end{cases}$$

(2 val.) a) Mostre que este sistema define, numa vizinhança do ponto  $(t_0, x_0, y_0) = (2, 1, 1)$ , uma função de classe  $C^1$ , dada por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

(1.5 val.) b) Calcule  $\gamma'(2)$ .

(5) Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; x = y; x > 0; z > 0\}.$$

(2 val.) a) Mostre que  $M$  é uma variedade e determine a sua dimensão.

(1.5 val.) b) Determine um vector normal a  $M$  no ponto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

(2 val.) c) Parametrize  $M$ .

(3 val.) (6) Mostre que a função  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $H(x, y) = (2xy, y^2 - x^2)$ , transforma curvas ortogonais que passam no ponto  $(1, 0)$  em curvas ortogonais que passam no ponto  $(0, -1)$ .