**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
## TODOS OS CURSOS EXECEPTO LEB, LEBM, LEFT, LEMAT, LEQ, LMAC, LQ
## TESTE 1 – 28 DE ABRIL DE 2007 – VERSÃO 1

**Apresente e justifique todos os cálculos**

duração: 90 minutos

(3 val.) (1) Considere a função

$$h(x,y) = \begin{cases} 5 - 2\,\dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ a, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determine, justificando, o valor de $a$ para que $h$ seja contínua na origem.

(2 val.) (2) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$f(x,y) = (xy, x+y, 2x),$$

e a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$, de classe $C^1$, tal que

$$Dg(1,2,2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule a derivada de $g \circ f$ no ponto $(1,1)$, segundo o vector $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(3 val.) (3) Determine e classifique os pontos críticos do campo escalar dado por

$$F(x,y,z) = \frac{x^3}{3} - x + \frac{3}{2}y^2 + \sqrt{2}yz + z^2.$$

(4) O tempo $t$ e as coordenadas $(u,v)$ de um ponto em movimento no plano satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} u^2 + v^2 &= e^{2t} + 1 \\ u\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}u) &= t. \end{cases}$$

(2 val.) a) Mostre que este sistema define, numa vizinhança do ponto $(t_0, u_0, v_0) = (1, 1, e)$, uma função de classe $C^1$, dada por

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)).$$

(1.5 val.) b) Calcule $\alpha'(1)$.

(5) Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x = y, x > 0\}.$$

(2 val.) a) Mostre que $A$ é uma variedade e determine a sua dimensão.

(1.5 val.) b) Determine um vector tangente a $A$ no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(2 val.) c) Parametrize $A$.

(3 val.) (6) Mostre que a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ transforma curvas ortogonais que passam no ponto $(0,1)$ em curvas ortogonais que passam no ponto $(-1,0)$.