Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
TODOS OS CURSOS EXECEPTO LEAMB, LEMAT, LQ, MEBIOL, MEQ,
TESTE 1 – 3 DE NOVEMBRO DE 2007

Apresente e justifique todos os cálculos

(1) Considere

$$h(x,y) = \begin{cases} 2 + \dfrac{2x^2 - y^2}{3x^2 + y^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) a) Mostre que h não é contínua na origem.

(1 val.) b) Encontre uma recta $L \subset \mathbb{R}^2$ que passe na origem e tal que a restrição de h a L seja contínua na origem.

(3 val.) (2) Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$f(x,y,z) = (x^2 - y, x + y^2 + z),$$

e a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tal que

$$Dg(0,2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule a derivada de $g \circ f$ no ponto $(1,1,0)$, segundo o vector $v = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

(3) Considere o conjunto $C \subset \mathbb{R}^3$ definido por:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 &= 2 + z + e^x \\ x + y &= 2. \end{cases}$$

(3 val.) a) Mostre que C é uma variedade e determine a sua dimensão.

(2 val.) b) Determine um vector não nulo normal a C no ponto $P = (0,2,1)$.

(2 val.) c) Mostre que, numa vizinhança do ponto $P = (0,2,1)$, o sistema define x e y como funções de z, de classe C^1. Calcule $y'(1)$.

(4) Considere o conjunto

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

e o campo escalar dado por $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + (z^2 - 4)^2$.

(2 val.) a) Determine os pontos críticos de f no interior de B e classifique-os.

(2 val.) b) Determine o valor máximo e o valor mínimo de f em B.

(3 val.) (5) Seja $f \ : \ D \subset \mathbb{R}^n \ \to \mathbb{R}$, onde $D = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x|| < 3\}$, uma função de classe C^1 tal que $||\nabla f(x)|| \leq 1, \forall x \in D$. Mostre que

$$|f(x) - f(y)| < 6, \ \forall x,y \in D.$$