

Integrabilidade

1 Teorema da Convergência Monótona

Teorema 1.1 *Seja $\{f_k\}$ uma sucessão de funções definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}^n$, tais que:*

- i) $f_k \in L(I)$, $\forall k \in \mathbb{N}$
- ii) $\{f_k\}$ é uma sucessão monótona
- iii) $\{\int_I f_k\}$ é uma sucessão limitada

Então, $\{f_k\}$ converge para uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ qtp, e tem-se:

- $f \in L(I)$
- $\int_I f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_I f_k$

A demonstração deste teorema pode ser vista em [1, 2]. De seguida, apresentam-se alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 1.1 *Seja $p > -1$ e considere-se a função $f(x) = x^p$ e definida no intervalo $I =]0, 1]$. Então f é integrável em I .*

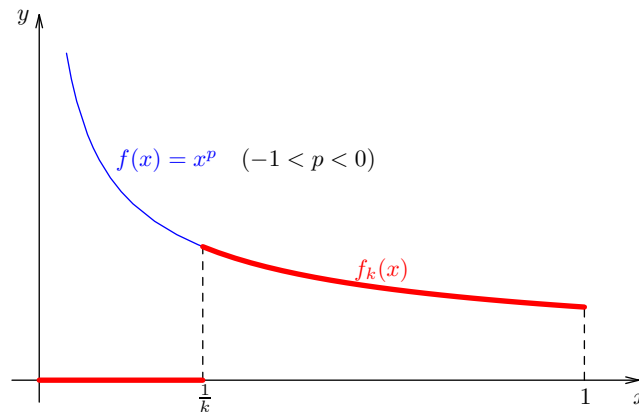


Figura 1: A função f_k para $f(x) = x^p$, $(-1 < p < 0)$

De facto, partindo de f podemos construir uma sucessão de funções, (f_k) , verificando as condições do teorema da convergência monótona.

Seja

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < x < \frac{1}{k} \\ f(x), & \text{se } \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Na figura 1 representa-se a construção das funções f_k para $-1 < p < 0$.

Note-se que se tem:

- i) $f_k \in L(I)$ porque f_k é contínua no intervalo compacto $[1/k, 1]$ e nula no intervalo $]0, 1/k[$.

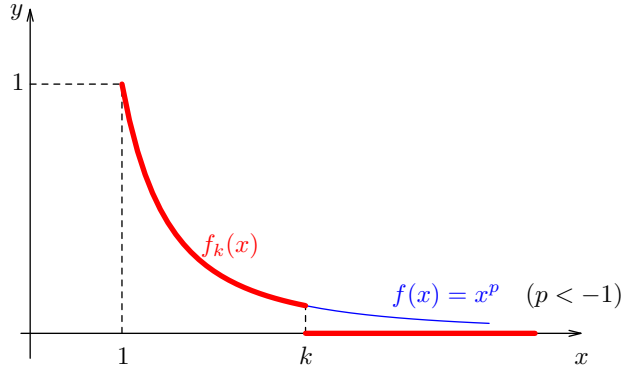


Figura 2: A função f_k para $f(x) = x^p$, $(p < -1)$

ii) $f_k \leq f_{k+1}$ porque a função f é positiva.

iii) A sucessão de integrais $(\int_I f_k)$ é majorada. De facto, temos

$$\int_I f_k = \int_{1/k}^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} \left(1 - \frac{1}{k^{p+1}}\right) \leq \frac{1}{p+1}$$

Assim, tendo em conta que, por construção, $f_k \rightarrow f$ quando $k \rightarrow \infty$, concluímos que $f \in L(I)$. Além disso, dado que $p > -1$,

$$\int_I f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_I f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{p+1} \left(1 - \frac{1}{k^{p+1}}\right) = \frac{1}{p+1}$$

Exemplo 1.2 Seja $p < -1$ e considere-se a função $f(x) = x^p$ e definida no intervalo $I = [1, \infty[$. Então f é integrável em I .

Seja

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } 1 \leq x \leq k \\ 0, & \text{se } x > k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Na figura 2 representa-se a construção das funções f_k para $p < -1$.

Então tem-se:

i) $f_k \in L(I)$ porque f_k é contínua no intervalo compacto $[1, k]$ e nula no intervalo $]k, \infty[$.

ii) $f_k \leq f_{k+1}$ pela forma como foram definidas as funções f_k e porque f é uma função positiva.

iii) A sucessão de integrais $(\int_I f_k)$ é majorada. De facto, temos

$$\int_I f_k = \int_1^k x^p dx = \frac{1}{p+1} (k^{p+1} - 1) \rightarrow -\frac{1}{p+1}$$

Sendo convergente, certamente é majorada.

Assim, tendo em conta que, por construção $f_k \rightarrow f$ quando $k \rightarrow \infty$, concluímos que $f \in L(I)$. Além disso, dado que $p < -1$,

$$\int_I f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_I f_k = -\frac{1}{p+1}$$

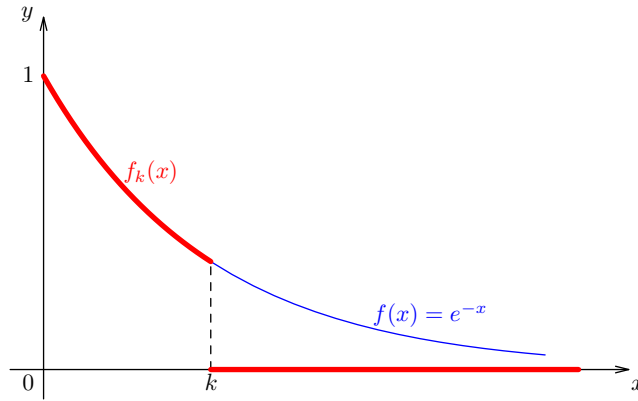


Figura 3: A função f_k para $f(x) = e^{-x}$

Exemplo 1.3 A função $f(x) = e^{-x}$ definida no intervalo $I = [0, \infty[$ é integrável e temos

$$\int_{[0, \infty[} e^{-x} dx = 1$$

De facto, considere-se a sucessão de funções (f_k) definidas da maneira seguinte:

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } 0 \leq x \leq k \\ 0, & \text{se } x > k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N},)$$

tal como se ilustra na figura 3.

Então tem-se:

- i) $f_k \in L(I)$ porque f_k é contínua no intervalo compacto $[0, k]$ e nula no intervalo $]k, \infty[$.
- ii) $f_k \leq f_{k+1}$ pela forma como foram definidas as funções f_k e porque a função f é positiva.
- iii) A sucessão de integrais $(\int_I f_k)$ é majorada. De facto, temos

$$\int_I f_k = \int_0^k e^{-x} dx = 1 - e^{-k} < 1$$

Portanto, invocando o teorema da convergência monótona, concluímos que $f \in L(I)$ e, além disso,

$$\int_{[0, \infty[} e^{-x} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k e^{-x} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - e^{-k}) = 1$$

Exemplo 1.4 A função $f(x) = xe^{-x}$ é integrável em $I = [0, \infty[$.

Procede-se como no exemplo anterior considerando a sucessão de funções (f_k) definidas por:

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } 0 \leq x \leq k \\ 0, & \text{se } x > k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Facilmente se verifica que

- i) $f_k \in L(I)$ porque f_k é contínua no intervalo compacto $[0, k]$ e nula no intervalo $]k, \infty[$.
- ii) $f_k \leq f_{k+1}$ pela forma como foram definidas as funções f_k e porque a função f é positiva.
- iii) A sucessão de integrais $(\int_I f_k)$ é majorada. De facto, temos

$$\int_I f_k = \int_0^k x e^{-x} dx = 1 - e^{-k} + k e^{-k} \rightarrow 1$$

Sendo convergente, será certamente majorada.

Assim, f é integrável e

$$\int_{[0, \infty[} x e^{-x} dx = 1$$

Exemplo 1.5 A função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ é integrável em $I = [0, \infty[$.

Tal como no exemplo anterior consideremos a sucessão de funções (f_k) definidas por:

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } 0 \leq x \leq k \\ 0, & \text{se } x > k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Facilmente se verifica que

- i) $f_k \in L(I)$ porque f_k é contínua no intervalo compacto $[0, k]$ e nula no intervalo $]k, \infty[$.
- ii) $f_k \leq f_{k+1}$ pela forma como foram definidas as funções f_k e porque a função f é positiva.
- iii) A sucessão de integrais $(\int_I f_k)$ é majorada. De facto, temos

$$\int_I f_k = \int_0^k \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan k \leq \frac{\pi}{2}$$

Assim, o teorema da convergência monótona garante que f é integrável e

$$\int_{[0, \infty[} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \arctan k = \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 1.6 A função

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{\alpha/2}, & \text{se } 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

com $\alpha > -2$ é integrável em

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Note-se que a função f pode não ser limitada em B . Assim, consideremos a sucessão de funções (f_k) definidas da forma seguinte:

$$f_k(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } \frac{1}{k} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ 0, & \text{se } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{k} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Facilmente se verifica que

- i) $f_k \in L(B)$ porque f_k é contínua no compacto $C_k = \{(x, y) : \frac{1}{k} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ e nula em $B \setminus C_k$.
- ii) $f_k \leq f_{k+1}$ e $f_k \rightarrow f$, porque $f \geq 0$ e pela forma como foram definidas as funções f_k .
- iii) A sucessão de integrais $(\int_B f_k)$ é majorada. De facto, em coordenadas polares, (ρ, θ) , e sendo $\alpha > -2$, temos

$$\int_B f_k = \int_0^{2\pi} \left(\int_{1/k}^1 \rho^\alpha d\rho \right) d\theta = 2\pi \int_{1/k}^1 \rho^{\alpha+1} d\rho = \frac{2\pi}{\alpha+2} \left(1 - \frac{1}{k^{\alpha+2}} \right) < \frac{2\pi}{\alpha+2}$$

O teorema da convergência monótona garante que $f \in L(B)$ e

$$\int_B f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k = \frac{2\pi}{\alpha+2}$$

Exemplo 1.7 A função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

é integrável no cilindro dado por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 ; 0 < z < 1\}$$

Note-se que f é uma função ilimitada em qualquer vizinhança do eixo vertical z . Consideremos a sucessão de funções (f_k) definidas por

$$f_k(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{se } \frac{1}{k} < \sqrt{x^2 + y^2} < 1 ; 0 < z < 1 \\ 0, & \text{se } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{k} ; 0 < z < 1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Sendo f contínua e limitada no conjunto limitado

$$C_k = \{(x, y, z) : \frac{1}{k} < \sqrt{x^2 + y^2} < 1 ; 0 < z < 1\}$$

então $f_k \in L(C)$.

Sendo $f > 0$ e pela forma como foram definidas as funções f_k , temos $f_k \leq f_{k+1}$.

Além disso, em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) , temos

$$\int_C f_k = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1/k}^1 \frac{\rho}{\rho} d\rho dz d\theta = 2\pi \left(1 - \frac{1}{k} \right) < 2\pi$$

Assim, pelo teorema da convergência monótona, concluimos que $f \in L(C)$ e

$$\int_C f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_C f_k = 2\pi$$

Exemplo 1.8 A função

$$f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$$

é integrável em $\mathbb{R}^2$ e

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 + y^2)} dx dy = \pi$$

Consideremos a sucessão de funções (f_k) dadas por

$$f_k(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq k \\ 0, & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2} > k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Então:

- i) $f_k \in L(\mathbb{R}^2)$ porque f_k é contínua no compacto $B_k = \{(x, y) : 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq k\}$ e nula em $\mathbb{R}^2 \setminus B_k$.
- ii) $f_k \leq f_{k+1}$ e $f_k \rightarrow f$, porque $f \geq 0$ e pela forma como foram definidas as funções f_k .
- iii) A sucessão de integrais $(\int_{\mathbb{R}^2} f_k)$ é majorada. De facto, em coordenadas polares, (r, θ) , temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_k = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^k r e^{-r^2} dr \right) d\theta = \pi \int_0^k 2r e^{-r^2} dr = \pi(1 - e^{-k^2}) \rightarrow \pi$$

O teorema da convergência monótona permite concluir que $f \in L(\mathbb{R}^2)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi$$

Exemplo 1.9 Para $\alpha > 3/2$, a função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}$$

é integrável em

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$$

Considere-se a sucessão de funções (f_k) definidas da forma seguinte:

$$f_k(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{se } 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq k \\ 0, & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Tal como no exemplo anterior temos,

- i) $f_k \in L(D)$ porque f_k é contínua no conjunto compacto

$$D_k = \{(x, y, z) : 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq k\}$$

e nula em $D \setminus D_k$.

- ii) $f_k \leq f_{k+1}$ e $f_k \rightarrow f$, porque $f \geq 0$ e pela forma como foram definidas as funções f_k .
- iii) A sucessão de integrais $(\int_D f_k)$ é majorada. De facto, em coordenadas esféricas, (r, θ, ϕ) , e sendo $\alpha > 3/2$, temos

$$\int_D f_k = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \left(\int_1^k r^2 \sin \phi \frac{1}{r^{2\alpha}} dr \right) d\phi \right) d\theta = 4\pi \int_1^k r^{2-2\alpha} dr = \frac{4\pi}{3-2\alpha} (k^{3-2\alpha} - 1)$$

e, portanto,

$$\int_D f_k \rightarrow -\frac{4\pi}{3-2\alpha}$$

Assim, pelo teorema da convergência monótona, concluímos que $f \in L(D)$ e

$$\int_D f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_D f_k = \frac{4\pi}{2\alpha - 3}$$

2 Teorema da Convergência Dominada

Teorema 2.1 *Seja $\{f_k\}$ uma sucessão de funções definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}^n$, tais que:*

- i) $f_k \in L(I)$, $\forall k \in \mathbb{N}$*
- ii) Existe uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_k \rightarrow f$ qtp.*
- iii) Existe uma função $g \in L(I)$ tal que $|f_k| \leq g$; $\forall k$*

Então,

- $f \in L(I)$
- $\int_I f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_I f_k$

A demonstração deste teorema pode ser vista em [1, 2]. Na prática usa-se muitas vezes uma versão do teorema da convergência dominada para funções contínuas. Esta versão estabelece um critério que permite determinar se uma dada função contínua é integrável.

Corolário 2.1 *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}^n$, e suponhamos que existe outra função $g \in L(I)$ tal que*

$$|f| \leq g \quad \text{qtp em } I$$

então, $f \in L(I)$.

Para demonstrar este corolário basta considerar uma sucessão de intervalos compactos I_n tais que

$$I_n \subset I_{n+1}; \quad I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

e a sucessão de funções f_n definidas por

$$f_n = f \chi_{I_n}$$

em que χ_{I_n} designa a função característica de I_n .

Note-se que é claro que $f_n \rightarrow f$ qtp. Por outro lado $f_n \in L(I)$ porque f_n é contínua sobre o intervalo compacto I_n . Por definição de f_n é também claro que

$$|f_n| \leq g.$$

Portanto, o teorema da convergência dominada garante que a função f é integrável em I .

Exemplo 2.1 Considere-se a função

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$$

definida no intervalo $I = [1, \infty[$.

Trata-se de uma função contínua tal que

$$|f(x)| = \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} = g(x)$$

Sendo g integrável em I , pelo corolário 2.1 do teorema da convergência dominada, concluímos que f é integrável em I .

Exemplo 2.2 Seja

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$$

no intervalo $I = [0, \infty[$.

Por se tratar de uma função contínua, podemos tentar encontrar uma função $g \in L(I)$ tal que $|f| \leq g$ qtp em I . A primeira ideia seria considerar $g(x) = \frac{1}{x^2}$ porque $1+x^4 \geq x^4$. No entanto, esta função g não é integrável em $]0, \infty[$, mas é integrável no intervalo $]1, \infty[$. Assim, devemos analisar f na união dos intervalos $[0, 1]$ e $]1, \infty[$. De facto, temos,

$$|f(x)| = f(x) \leq \begin{cases} x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Assim, seja

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Note-se que g é integrável em I porque x^2 é integrável em $[0, 1]$ e $1/x^2$ é integrável em $]1, \infty[$.

Portanto, pelo corolário 2.1 do teorema da convergência dominada, $f \in L(I)$.

Exemplo 2.3 Considere-se a função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}$$

definida no intervalo $]0, \infty[$.

Neste caso temos

$$|f(x)| \leq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x^{5/2}}, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Sabendo que $1/\sqrt{x}$ é integrável em $]0, 1]$ e $1/x^{5/2}$ é integrável em $[1, \infty[$, pelo corolário 2.1 do teorema da convergência dominada, concluímos que f é integrável em I .

Exemplo 2.4 A função $f(x) = \log x$ é integrável no intervalo $I =]0, 1]$.

Note-se que f não é limitada em I . No entanto, por ser contínua, f é integrável no intervalo compacto $[\epsilon, 1]$ para todo $0 < \epsilon < 1$.

Resta-nos analisar f no intervalo $]0, \epsilon[$. Para isso, relembremos que para todo $p > 0$ temos

$$x^p \log x \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow 0^+$$

Tome-se $p = 1/2$. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$0 < x < \epsilon \Rightarrow |\sqrt{x} \log x| < 1$$

ou seja,

$$|\log x| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ se } 0 < x < \epsilon$$

Sabendo que $\frac{1}{\sqrt{x}}$ é integrável em $]0, \epsilon[$, concluímos, invocando o corolário 2.1 do teorema da convergência dominada, que $\log x$ é integrável em $]0, 1[$.

Exemplo 2.5 Vamos aplicar o teorema da convergência dominada para calcular o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{r^n}{1+r^{n+2}} dr$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f_n(r) = \frac{r^n}{1+r^{n+2}}$$

Trata-se de uma função contínua, não negativa e, portanto, será integrável se for majorada por outra função integrável.

Sendo $1+r^{n+2} > 1$, temos

$$f_n(r) \leq r^n \leq 1 ; \text{ para } 0 < r < 1$$

Pela mesma razão,

$$f_n(r) \leq \frac{r^n}{r^{n+2}} = \frac{1}{r^2}$$

Portanto, se considerarmos a função $g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(r) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < r < 1 \\ \frac{1}{r^2}, & \text{se } r \geq 1 \end{cases}$$

então, temos

$$f_n \leq g ; \forall n$$

Assim, as funções f_n são integráveis em $[0, \infty[$ porque a função g é integrável.

Por outro lado, é fácil verificar que $f_n \rightarrow f$ em que $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é a função dada por

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < r < 1 \\ \frac{1}{r^2} & \text{se } r \geq 1 \end{cases}$$

Estamos, assim, nas condições de aplicar o teorema da convergência dominada e concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(r) dr = \int_0^{\infty} f(r) dr = \int_1^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = 1$$

Exemplo 2.6 Recorrendo ao teorema da convergência dominada podemos calcular o limite seguinte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^r \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = r! ; \quad r \in \mathbb{N}$$

Em primeiro lugar note-se que a variável n aparece no intervalo de integração. Para ultrapassar esta dificuldade consideremos as funções f_n definidas por

$$f_n(x) = x^r \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,n]}(x)$$

em que $\chi_{[0,n]}$ designa a função característica do intervalo $[0, n]$. Assim, teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,\infty[} f_n = r!$$

É claro que, para cada n , se tem $f_n \in L([0, \infty[)$ por se tratar de uma função contínua no intervalo compacto $[0, n]$.

Por outro lado, note-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$$

ou seja, $f_n \rightarrow f$ em que

$$f(x) = x^r e^{-x}.$$

Relembremos que, para $0 \leq t < 1$, temos

$$(1 - t)^{-1} = 1 + t + \dots + t^k + \dots \geq 1 + \frac{t}{1!} + \dots + \frac{t^k}{k!} + \dots = e^t$$

e, portanto, para $0 \leq x < n$, obtemos

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-1} \geq e^{x/n}$$

ou seja,

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}; \text{ em } [0, n[$$

Estamos, assim, em condições de aplicar o teorema da convergência dominada e temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty[} f_n = \int_0^\infty x^r e^{-x} dx = r!$$

Note-se que o integral $\int_0^\infty x^r e^{-x} dx$ pode ser calculado usando o teorema da convergência monótona (ver exemplo 1.4 para $r=1$).

3 Regra de Leibniz

Surtem na prática certas funções que são definidas através do integral de outras funções e coloca-se a questão da sua derivação. Em certas condições, a regra de Leibniz estabelece, em termos grosseiros, que a derivada de uma função definida por um integral é o integral da derivada.

Seja $F(t) = \int_A f(x, t) dx$ para $t \in B$, sendo A e B intervalos. Pretende-se estabelecer que a seguinte sequência de igualdades seja verdadeira

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_A f(x, t) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_A \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} dx \\ &= \int_A \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} dx \\ &= \int_A \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx \end{aligned}$$

Para que tudo faça sentido, fixando $t \in B$, devemos ter

- A função $f(x, t)$ deve ser integrável em A como função de x .
- A derivada $\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)$ deve existir em quase todos os pontos $x \in A$.

Para além disso, é crucial que seja possível trocar o símbolo de integral com o símbolo de derivada. Para isso, é natural pensar em algum teorema de convergência. Se for possível estabelecer que existe uma função $g \in L(A)$, independente de t tal que

$$\left| \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} \right| \leq g(x)$$

então, invocando o teorema da convergência dominada, teremos estabelecido o resultado pretendido (cf. [1, 2]).

Teorema 3.1 *Seja $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que*

- i) A função $x \mapsto f(x, t)$ é integrável em A .*
- ii) A derivada $\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)$ existe em quase todos os pontos $x \in A$.*
- iii) Existe uma função $g \in L(A)$, independente de t , tal que*

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right| \leq g(x)$$

para quase todo $x \in A$.

Então,

$$\frac{d}{dt} \int_A f(x, t) dx = \int_A \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx. \quad \text{Regra de Leibniz)}$$

Exemplo 3.1 Neste exemplo vamos usar a regra de Leibniz para mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx = \log t ; t > 0$$

Consideremos a função $f(x, t) = \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x}$ definida para $x > 0 ; t > 0$. Note-se que se tomarmos $f(0, t) = t - 1$, então $f(x, t)$ prolonga-se continuamente aos pontos da forma $(0, t)$, $t > 0$.

Facilmente se verifica que $|f(x, t)| \leq g(x, t)$ em que a função g é definida por

$$g(x, t) = \begin{cases} |f(x, t)|, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 ; t > 0 \\ e^{-x} - e^{-xt}, & \text{se } x > 1 ; t > 0 \end{cases}$$

Note-se que a função g é integrável em x para cada $t > 0$ fixo. Portanto, a função dada pelo integral

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx$$

está bem definida.

Por outro lado, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = e^{-xt}$$

Assim, dado $t > 0$, seja $a > 0$ tal que $t > a$. Então temos

$$0 \leq e^{-xt} \leq e^{-xa} ; x \geq 0 ; t > a > 0$$

e, portanto, podemos aplicar a regra de Leibniz e calcular

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx = \int_0^\infty e^{-xt} dx = \frac{1}{t}$$

de onde concluímos que

$$F(t) = \log t + C$$

Sendo $F(1) = 0$, obtemos

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx = \log t$$

Exemplo 3.2 Consideremos a função definida por

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} \operatorname{sen} xt}{x} dx$$

Vamos usar a regra de Leibniz para mostrar que $F(t) = \arctan t$. Note-se que efectuar o cálculo do integral directamente não é fácil. No entanto, se calcularmos a derivada da função integranda obtemos a função

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{-x} \operatorname{sen} xt}{x} \right) = e^{-x} \cos xt$$

cujo integral é certamente mais fácil de calcular. Portanto, torna-se necessário verificar que podemos aplicar a regra de Leibniz para calcular a derivada $F'(t)$ e seguidamente, por primitivação, obter $F(t)$.

Consideremos a função definida por

$$f(x, t) = \frac{e^{-x} \operatorname{sen} xt}{x}$$

Se tomarmos $f(0, t) = f(x, 0) = 0$, então, a função f poderá ser prolongada por continuidade a todo o espaço $\mathbb{R}^2$ e, portanto o integral que define $F(t)$ existe. De facto, para $0 \leq x \leq 1$, sendo f contínua, o respectivo integral existe. Para $x > 1$, sendo $|\operatorname{sen} xt| \leq 1$, obtemos $|f(x, t)| \leq e^{-x}$ e, portanto, o integral existe.

Por outro lado, facilmente obtemos a seguinte estimativa

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right| = |e^{-x} \cos xt| \leq e^{-x}$$

Sabendo que a função e^{-x} é integrável em $[0, \infty[$, estão verificadas as condições de aplicação da regra de Leibniz e, portanto, temos

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx = \int_0^\infty e^{-x} \cos xt dx = \frac{1}{1+t^2}$$

Sendo $F(0) = 0$, concluimos que

$$F(t) = \arctan t.$$

Referências

- [1] Luís T. Magalhães. *Integrais Múltiplos*. Texto Editora, 1996.
- [2] H. A. Priestley. *Introduction to Integration*. Oxford, Clarendon Press, 1997.