Análise Matemática III

1º semestre de 2005/2006

Exercício Teste 7 (a entregar na semana de 7/11/2005)

1. Use os teoremas de mudança de coordenadas e da função inversa para calcular

$$\int_U e^{x^2+y^2-x^2y^2}\sqrt{1-x^2}$$

em que $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1\}$.
Sugestão: Considere a aplicação $\Phi(x,y) = (x, y\sqrt{1-x^2})$.

Resolução:

1. Considere a função $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\Phi \ : \ \begin{cases} u &= \ x \\ v &= \ y\sqrt{1-x^2}, \qquad (x,y) \in U. \end{cases} \tag{1}$$

Tem-se que Φ é (i) de classe $\mathcal{C}^1$, (ii) injectiva, e (iii) $\det D\Phi = \sqrt{1-x^2} \neq 0$ para cada $(x,y) \in U$. Pelo teorema da função inversa, o subconjunto $V = \Phi(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ é aberto e existe uma função inversa $\Psi : V \to U$ de classe $\mathcal{C}^1$. [1] Seja f a função integranda,

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2-x^2y^2}\sqrt{1-x^2}.$$

Pelo teorema de mudança de coordenadas obtém-se

$$\int_U f(x,y) = \int_{\Psi(V)} f(x,y) = \int_V f \circ \Psi(u,v) |\det D\Psi(u,v)|. \tag{2}$$

Do teorema da função inversa obtemos,

$$|\det D\Psi(u,v)| = |\det D\Phi(x,y)|^{-1}_{(x,y)=\Psi(u,v)} = \left(1-x^2\right)^{-1/2} = \left(1-u^2\right)^{-1/2}.$$

Por outro lado, para a função integranda, $f(x,y)$, vemos de (1) que

$$\left(f \circ \Psi\right)(u,v) = e^{u^2+v^2} \ \sqrt{1-u^2}$$

e portanto

$$\left(f \circ \Psi\right)(u,v) |\det D\Psi(u,v)| = e^{u^2+v^2}.$$

Vejamos agora qual a imagem da região de integração. A fronteira de U é constituída por quatro segmentos de recta,

$$\partial U = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 = [0,1] \times \{0\} \cup \{1\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{1\} \cup \{0\} \times [0,1].$$

[1] Observemos que, neste exemplo, a função inversa Ψ pode ser encontrada facilmente de forma explícita, $\Psi : V \to \mathbb{R}^2$, com $\Psi(u,v) = (u, v/\sqrt{1-u^2})$.

A imagem por Φ da fronteira de U é a fronteira de $V = \Phi(U)$. Uma vez que para conhecer V basta conhecer a sua fronteira determinemos $\partial V = \Phi(\partial U)$. De (1) obtemos

$$\begin{aligned}
\Phi(C_1) &= \Phi([0,1] \times \{0\}) = \{(u,0),\ 0 \le u \le 1\} = [0,1] \times \{0\} \\
\Phi(C_2) &= \Phi(\{1\} \times [0,1]) = \{(1,0)\} \\
\Phi(C_3) &= \Phi([0,1] \times \{1\}) = \left\{(x, \sqrt{1-x^2})),\ 0 \le x \le 1\right\} \\
\Phi(C_4) &= \Phi(\{0\} \times [0,1]) = \{(0,v),\ 0 \le v \le 1\} = \{0\} \times [0,1].
\end{aligned}$$

Vemos que $\Phi(C_3)$ é o arco da circunferência, $x^2 + y^2 = 1$, com $x \ge 0, y \ge 0$ e a união destes 4 conjuntos coincide com a fronteira da região

$$V = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ :\ u^2 + v^2 < 1;\ u > 0;\ v > 0\right\}.$$

Temos então, do teorema de mudança de coordenadas, que

$$\int_U f(x,y) = \int_V e^{u^2+v^2}.$$

Usando novamente o teorema de mudança de coordenadas, com $(u,v) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_U e^{x^2+y^2-x^2y^2}\sqrt{1-x^2} &= \int_V e^{u^2+v^2} \\
&= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} e^{r^2} r\, d\theta dr \\
&= \frac{\pi}{4}(e-1).
\end{aligned}$$