

Análise Matemática III

1º semestre de 2005/2006

Exercício Teste 7 (a entregar na semana de 7/11/2005)

1. Use os teoremas de mudança de coordenadas e da função inversa para calcular

$$\int_U e^{x^2+y^2-x^2y^2} \sqrt{1-x^2}$$

em que $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1\}$.

Sugestão: Considere a aplicação $\Phi(x, y) = (x, y\sqrt{1-x^2})$.

Resolução:

1. Considere a função $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\Phi(x, y) = (x, y\sqrt{1-x^2})$. Tem-se que Φ é (i) de classe $\mathcal{C}^1$, (ii) injectiva, e (iii) $\det D\Phi = \sqrt{1-x^2} \neq 0$ para cada $(x, y) \in U$. Pelo teorema da função inversa, o subconjunto $V = \Phi(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ é aberto e existe uma função $\Psi : V \rightarrow U$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $\Phi \circ \Psi(u, v) = (u, v)$ e $\Psi \circ \Phi(x, y) = (x, y)$. Portanto $\Phi : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^1$. Seja

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2-x^2y^2} \sqrt{1-x^2}.$$

Pelo teorema de mudança de coordenadas obtém-se

$$\int_U f(x, y) = \int_{\Psi(V)} f(x, y) = \int_V f \circ \Psi(u, v) |\det D\Psi(u, v)|.$$

Seja $\Psi(u, v) = (\psi_1(u, v), \psi_2(u, v))$. Então

$$|\det D\Psi(u, v)| = |\det D\Phi(\Psi(u, v))|^{-1} = (1 - \psi_1(u, v)^2)^{-1/2},$$

e como $\Phi \circ \Psi(u, v) = (u, v)$ obtém-se $\psi_1(u, v) = u$ e $\psi_2(u, v)\sqrt{1-\psi_1(u, v)^2} = v$. Segue-se

$$\begin{aligned} f \circ \Psi(u, v) |\det D\Psi(u, v)| &= f(\psi_1(u, v), \psi_2(u, v)) (1 - \psi_1(u, v)^2)^{-1/2} \\ &= e^{\psi_1(u, v)^2 + \psi_2(u, v)^2 - \psi_1(u, v)^2 \psi_2(u, v)^2} \sqrt{1 - \psi_1(u, v)^2} (1 - \psi_1(u, v)^2)^{-1/2} \\ &= e^{\psi_1(u, v)^2 + \psi_2(u, v)^2 (1 - \psi_1(u, v)^2)} \\ &= e^{u^2 + v^2}. \end{aligned}$$

Para cada $b \in]0, 1[$ considere o segmento horizontal $S_b = \{(x, b) \in U \mid 0 < x < 1\}$. Tem-se $(u, v) = \Phi(x, b) = (x, b\sqrt{1-x^2})$. Logo $\Phi(S_b)$ pertence ao elipse $u^2 + \frac{v^2}{b^2} = 1$, e segue-se que

$$V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1, 0 < u < 1 \text{ e } 0 < v < 1\}.$$

Usando o teorema de mudança de coordenadas, com $(u, v) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_U e^{x^2+y^2-x^2y^2} \sqrt{1-x^2} &= \int_V e^{u^2+v^2} \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} e^{r^2} r \, d\theta \, dr \\ &= \frac{\pi}{4} (e - 1). \end{aligned}$$