Análise Matemática III
1º semestre de 2001/02

Exercício-Teste 8

Marcelino Gaudêncio não teve uma vida nada fácil. Este bisavô do Sr. Gaudêncio, que deixou, como vamos sabendo, uma descendência de familares ilustres, pagou caro os seus erros de juventude vivida no fio da navalha durante os enebriantes anos finais do século XIX. Para escapar à polícia após uns assaltos mal-sucedidos a bancos, Marcelino Gaudêncio refugiou-se nos confins da América do Sul onde deu asas à sua fantasia secreta de infância: ter um circo de formigas!

O espectáculo do circo consistia em pôr as formigas, sujeitas a uma dieta cientificamente estudada, a dançar o Can-Can ao longo de um arame, no sentido anti-horário, que tinha a forma seguinte (a unidade é o metro):

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 4, \text{ para } x < 0;\ (x-1)^2 + y^2 = 4, \text{ para } x > 0\}.$$

A força de atrito ao longo do arame era dada pela expressão (a unidade é caloria/metro):

$$f(x,y) = (\frac{-y}{(x-2)^2 + y^2} + xe^{-(x^2+y^2)} + 3y, \frac{x-2}{(x-2)^2 + y^2} + ye^{-(x^2+y^2)} - 4x).$$

Calcule a quantidade de calorias que as formigas de Marcelino Gaudêncio gastam a vencer o atrito quando dançam à volta ao arame.

ps. Ficarão contentes de saber que esta história acabou bem. Devido ao sucesso popular estrondoso do seu circo de formigas, Marcelino Gaudêncio liderou uma revolta e nomeou-se a si próprio ditador vitalício daquele pequeno país. Veio depois a casar com a bisavó do nosso Sr. Gaudêncio, a Exma. Sra. Dona Consuela Gaudêncio.

Resolução:

As calorias gastas pelas formigas de Marcelino Gaudêncio ao longo do caminho C serão dadas por (-1) vezes o trabalho da força de atrito. Vamos decompor a força f em três partes:

$$g(x,y) = (\frac{-y}{(x-2)^2 + y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2 + y^2});\ h(x,y) = (xe^{-(x^2+y^2)}, ye^{-(x^2+y^2)});\ l(x,y) = (3y, -4x).$$

Teremos então $\oint_C f = \oint_C g + \oint_C h + \oint_C l$.

O campo g é fechado (como é imediato verificar) e está definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Seria muito complicado calcular directamente pela definição o trabalho de g ao longo de C. Vamos em vez disso considerar uma circunferência γ de raio $1/2$ e centrada no ponto $(2,0)$, orientada no sentido anti-horário. Pelo teorema de Green, como g é fechado, temos

$$\oint_\gamma g = \oint_C g.$$

Parametrizando $\gamma(\theta) = (2 + \frac{1}{2}\cos(\theta), \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta))$, com $\gamma'(\theta) = (-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta), \frac{1}{2}\cos(\theta))$, calculamos

$$\oint_\gamma g = \int_0^{2\pi} g(\gamma(\theta))\cdot\gamma'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} (-2\operatorname{sen}(\theta)), 2\cos(\theta))\cdot(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta)), \frac{1}{2}\cos(\theta))d\theta = 2\pi = \oint_C g.$$

Quanto ao campo h podemos observar que é um campo radial, isto é tem a forma $h(x,y) = \alpha(r)(x,y)$ com $r^2 = x^2+y^2$ e, neste caso, $\alpha(r) = \exp(-x^2-y^2)$. Facilmente observamos que h é fechado e que está definido em todo o plano, logo é gradiente (um potencial para h é dado por $\phi(x,y) = (-1/2)\exp(-x^2-y^2))$ e portanto $\oint_C h = 0$. Na verdade, esta força h, que como vimos é conservativa, nunca faria parte de uma força de atrito que nunca é conservativa. (Marcelino Gaudêncio, devido à sua juventude atribulada não tinha muito tempo para estudar e não era um cromo em AMIII.)

Quanto ao campo l, o mais simples é calcular $\oint_C l$ utilizando o teorema de Green. Seja D a região do plano limitada por C. Então, como $\partial_1 l_2 - \partial_2 l_1 = -4-3 = -7$, temos pelo teorema de Green

$$\oint_C l = \int\int_D (-7)dxdy = -7\,(\text{area de } D) = -28\int_0^{\pi/2}(\int_0^{\cos(\theta)+\sqrt{3+\cos(\theta)^2}} rdr)d\theta =$$

$$= -28\int_0^{\pi/2}(\cos(\theta)^2 + 3/2 + \cos(\theta)\sqrt{3+\cos(\theta)^2})d\theta = -28(\pi/4 + 3\pi/4 + 2\pi + \sqrt{2/3})) = -28(3\pi + \sqrt{2/3}).$$

Assim, o trabalho da força f ao longo de C é $-28(3\pi + \sqrt{2/3})$ calorias. As formigas gastam portanto $28(3\pi + \sqrt{2/3})$ calorias por volta. (Elas estavam mesmo muito bem treinadas fisicamente por Marcelino Gaudêncio.)

Nota: A primitiva de $\cos(\theta)\sqrt{3+\cos(\theta)^2}$ pode ser obtida com a substituição $\alpha = \operatorname{arcsen}(1/2\operatorname{sen}\theta)$.