Análise Matemática III
1º semestre de 2003/2004

Exercício teste 2 (a entregar na aula prática da semana de 29/9/2003)

1) Mostre que a fronteira ∂S do conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < \sqrt{6 - (x^2 + y^2)}\}$$

tem medida nula em $\mathbb{R}^3$.

2) Para $I \subset \mathbb{R}^2$ o intervalo $I =]0, 5[\times]0, 5[$, considere a função em escada $s : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$s(x, y) = \begin{cases} \sqrt{2} & 0 < x < 2,\ 0 < y < 2 \\ -4 & 0 < x < 2,\ 2 < y < 5 \\ 5 & 2 < x < 3,\ 0 < y < 2 \\ 2\pi & 2 < x < 3,\ 2 < y < 5 \\ 6 & 3 < x < 5,\ 0 < y < 2 \\ 3 & 3 < x < 5,\ 2 < y < 5. \end{cases}$$

Calcule $\int_I s$.

Resolução

1) A fronteira do conjunto S é dada por $\partial S = S_1 \cup S_2$ onde

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{6 - (x^2 + y^2)},\ 2 < z \leq \sqrt{6}\}$$

e

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq 2\}.$$

Cada um destes conjuntos tem medida nula em $\mathbb{R}^3$.

Com efeito, S_1 é um subconjunto do gráfico da função contínua $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x, y) = \sqrt{6 - (x^2 + y^2)}$ no interior do disco de centro na origem e raio $\sqrt{6}$, e zero fora dele, pelo que tem medida nula.

Do mesmo modo, S_2 é subconjunto do gráfico da função contínua $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f_2(x, y) = x^2 + y^2$, pelo que também tem medida nula.

Assim, como a união de dois conjuntos com medida nula tem ainda medida nula, conclui-se que ∂S tem medida nula.

2) Considere-se a partição do intervalo $I =]0, 5[\times]0, 5[$ nos subintervalos I_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) em que

$$\begin{aligned} I_1 &=]0, 2[\times]0, 2[\\ I_2 &=]0, 2[\times]2, 5[\\ I_3 &=]2, 3[\times]0, 2[\\ I_4 &=]2, 3[\times]2, 5[\\ I_5 &=]3, 5[\times]0, 2[\\ I_6 &=]3, 5[\times]2, 5[. \end{aligned}$$

Considere-se também o conjunto dos valores da função s em cada um destes subintervalos, $\{s_j : j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, em que

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{2} \\ s_2 &= -4 \\ s_3 &= 5 \\ s_4 &= 2\pi \\ s_5 &= 6 \\ s_6 &= 3. \end{aligned}$$

Assim, temos $s(x, y) = s_j$ para $(x, y) \in I_j$, pelo que o integral de s é dado por

$$\int_I s = \sum_{j=1}^{6} s_j \, vol(I_j) = \sqrt{2}\times 4 - 4\times 6 + 5\times 2 + 2\pi\times 3 + 6\times 4 + 3\times 6 = 4\sqrt{2} + 6\pi + 28.$$