

Análise Matemática III

1º semestre de 2006/2007

Exercício teste 10 (a entregar na aula prática da semana de 27/11/2006)

Calcule o momento de inércia relativo ao eixo Oz da superfície S dada por:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}; 1 < x^2 + y^2 < 4\},$$

com densidade de massa por área igual a 1, de duas maneiras diferentes:

- usando uma parametrização com as coordenadas cilíndricas ρ e θ como parâmetros;
- usando uma parametrização com as coordenadas cartesianas x e y como parâmetros, fazendo depois uma mudança de coordenadas para coordenadas polares r e θ .

Resolução

A equação $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ define um cone com vértice o ponto $(0, 0, 4)$ e eixo o eixo Oz . A superfície S é a parte do cone contida entre as linhas:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4; z = 0\} \text{ e } \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; z = 2\}.$$

O momento de inércia I_z de S relativo ao eixo Oz é dado pelo integral

$$I_z = \int_S (x^2 + y^2).$$

- a) Uma parametrização de S (excluindo um segmento de recta) é dada por:

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 4 - 2\rho), \quad \rho \in]1, 2[, \quad \theta \in]0, 2\pi[.$$

A matriz derivada da parametrização é portanto

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim obtemos:

$$\begin{aligned} \|D_\rho g \times D_\theta g\| &= \sqrt{\det(Dg^t Dg)} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & -2 \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \\ -2 & 0 \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}} = \sqrt{5}\rho. \end{aligned}$$

Calculamos então o integral:

$$\begin{aligned}\int_S (x^2 + y^2) &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho^2 \cdot \sqrt{5} \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= \sqrt{5} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^2 = \frac{15\sqrt{5}\pi}{2}.\end{aligned}$$

b) Uma parametrização de S é dada por:

$$h(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in T$$

onde $f(x, y) = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ e T é a região no plano Oxy :

$$T = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

Neste caso o factor no integral é dado por:

$$\begin{aligned}\|D_x h \times D_y h\| &= \sqrt{\det(Dh^t Dh)} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} = \sqrt{5}.\end{aligned}$$

Portanto o integral é dado por:

$$\int_S (x^2 + y^2) = \int_T (x^2 + y^2) \sqrt{5} \, dx \, dy.$$

Fazendo uma mudança de coordenadas para coordenadas polares r e θ , a região planar T (excluindo um segmento de recta) é descrita pelas desigualdades: $0 < \theta < 2\pi$; $1 < r < 2$. Assim obtemos:

$$\int_S (x^2 + y^2) = \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \sqrt{5} \, r \, dr \, d\theta = \frac{15\sqrt{5}\pi}{2}.$$