Análise Matemática III

2º semestre de 2005/2006

Exercício Teste 9 (a entregar na semana de 08/05/2006)

a) Mostre que o conjunto

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 - y^2 - z^2 = 1; \ x^2 + y^2 + z^2 = 3\right\},$$

é uma variedade e determine a sua dimensão.

Resolução:
S coincide com o conjunto de nível zero da seguinte função de classe C^1

$$\begin{array}{rcl} F & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ F(x,y,z) & = & (x^2 - y^2 - z^2 - 1, x^2 + y^2 + z^2 - 3), \end{array}$$

Para mostrar que S é uma variedade é suficiente mostrar que

$$\text{car}(DF(x,y,z)) = 2, \ \forall (x,y,z) \in S.$$

Temos

$$\text{car}(DF(x,y,z)) = \text{car}\begin{pmatrix} 2x & -2y & -2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} = \text{car}\begin{pmatrix} x & -y & -z \\ 0 & y & z \end{pmatrix}.$$

Vemos que $\text{car}(DF)(x,y,z) < 2$ se e só se $x = 0$ ou $(y,z) = (0,0)$. Mas pontos com $x = 0$ ou $(y,z) = (0,0)$ não pertencem a S uma vez que os sistemas

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -y^2 - z^2 & = & 1 \\ & - & \end{array} \right.$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \end{array} \right. ,$$

são impossíveis.

b) Determine $(T_{(\sqrt{2},1,0)}S)^{\perp}$.

Resolução:
O espaço normal a S em cada ponto $P \in S$ é o espaço linear gerado pelas linhas da matriz derivada de F nesse ponto, $DF(P)$. Temos então

$$\begin{array}{rcl} (T_{(\sqrt{2},1,0)}S)^{\perp} & = & \mathcal{L}\left\{(2x,-2y,-2z),(2x,2y,2z)\right\}_{|_{(\sqrt{2},1,0)}} = \mathcal{L}\left\{(2\sqrt{2},-2,0),(2\sqrt{2},2,0)\right\} = \\ & = & \left\{(\sqrt{2}(\alpha+\beta),\alpha-\beta,0), \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ u_3 = 0\right\} = Oxy. \end{array}$$

c) Encontre uma parametrização de S numa vizinhança do ponto $(\sqrt{2},1,0)$ e determine $T_{(\sqrt{2},1,0)}S$ sem recorrer à alínea anterior. Verifique que os dois resultados estão de acordo entre si.

Resolução:
A curva S, ou nível zero de F, é dada pelo seguinte sistema equivalente a $F(x,y,z) = (0,0)$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 & = & 2 \\ y^2 + z^2 & = & 1 \ . \end{array} \right.$$

Vemos que uma parametrização de uma vizinhança do ponto $(\sqrt{2}, 1, 0)$ é dada por

$$g \; : \; \left\{ \begin{array}{rcll} x & = & \sqrt{2} & \\ y & = & \cos(t) & , \; -\pi < t < \pi \\ z & = & \mathrm{sen}(t) \; . & \end{array} \right.$$

com $(\sqrt{2}, 1, 0) = g(0)$. O espaço tangente a S no ponto $(\sqrt{2}, 1, 0)$ é então o espaço linear gerado por $g'(0) = (0, 0, 1)$,

$$T_{(\sqrt{2},1,0)}S = Oz$$

e portanto