

Análise Matemática III

2º semestre de 2005/2006

Exercício Teste 9 (a entregar na semana de 08/05/2006)

a) Mostre que o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z^2 = 1; x^2 + y^2 + z^2 = 3\},$$

é uma variedade e determine a sua dimensão.

Resolução:

S coincide com o conjunto de nível zero da seguinte função de classe C^1

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ F(x, y, z) &= (x^2 - y^2 - z^2 - 1, x^2 + y^2 + z^2 - 3), \end{aligned}$$

Para mostrar que S é uma variedade é suficiente mostrar que

$$\text{car}(DF(x, y, z)) = 2, \quad \forall (x, y, z) \in S.$$

Temos

$$\text{car}(DF(x, y, z)) = \text{car} \begin{pmatrix} 2x & -2y & -2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} = \text{car} \begin{pmatrix} x & -y & -z \\ 0 & y & z \end{pmatrix}.$$

Vemos que $\text{car}(DF)(x, y, z) < 2$ se e só se $x = 0$ ou $(y, z) = (0, 0)$. Mas pontos com $x = 0$ ou $(y, z) = (0, 0)$ não pertencem a S uma vez que os sistemas

$$\begin{cases} -y^2 - z^2 = 1 \\ - \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \end{cases},$$

são impossíveis. Portanto $\text{car}(DF(x, y, z)) = 2, \quad \forall (x, y, z) \in S$, e S é uma variedade diferencial de dimensão, $\dim(S) = 3 - 2 = 1$.

b) Determine $(T_{(\sqrt{2}, 1, 0)} S)^\perp$.

Resolução:

O espaço normal a S em cada ponto $P \in S$ é o espaço linear gerado pelas linhas da matriz derivada de F nesse ponto, $DF(P)$. Temos então

$$\begin{aligned} (T_{(\sqrt{2}, 1, 0)} S)^\perp &= \mathcal{L} \{(2x, -2y, -2z), (2x, 2y, 2z)\}_{|_{(\sqrt{2}, 1, 0)}} = \mathcal{L} \{(2\sqrt{2}, -2, 0), (2\sqrt{2}, 2, 0)\} = \\ &= \left\{ (\sqrt{2}(\alpha + \beta), -\alpha + \beta, 0), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_3 = 0 \right\} = Oxy. \end{aligned}$$

c) Encontre uma parametrização de S numa vizinhança do ponto $(\sqrt{2}, 1, 0)$ e determine $T_{(\sqrt{2}, 1, 0)} S$ sem recorrer à alínea anterior. Verifique que os dois resultados estão de acordo entre si.

Resolução:

A curva S , ou nível zero de F , é dada pelo seguinte sistema, equivalente a $F(x, y, z) = (0, 0)$,

$$\begin{cases} x^2 &= 2 \\ y^2 + z^2 &= 1. \end{cases}$$

Vemos que uma parametrização de uma vizinhança do ponto $(\sqrt{2}, 1, 0)$ é dada por

$$g : \begin{cases} x &= \sqrt{2} \\ y &= \cos(t) \\ z &= \sin(t) \end{cases}, \quad -\pi < t < \pi$$

e $(\sqrt{2}, 1, 0) = g(0)$. O espaço tangente a S no ponto $(\sqrt{2}, 1, 0)$ é então o espaço linear gerado por $g'(0) = (0, 0, 1)$,

$$T_{(\sqrt{2}, 1, 0)}S = Oz,$$

e portanto obtemos o mesmo resultado da alínea anterior

$$(T_{(\sqrt{2}, 1, 0)}S)^\perp = Oxy.$$